



断続引張試験による局所くびれ以降の 真応力-真ひずみ線図の評価

榎並 啓太郎*・長井 寿*

Evaluation of True Stress–True Strain Relationship after Local Necking by Stepwise Tensile Test

Keitaro ENAMI and Kotobu NAGAI

Synopsis : The goal in this research is to evaluate the correct true stress–true strain curve after local necking up to a true strain of 1.0. To achieve this goal, a smooth round tension test was carried out by a stepwise method. Yield stresses of the materials tested ranged from 251 to 1182 MPa. The tensile load–neck section diameter curve was measured in the stepwise test and was transformed into an average stress–true strain curve in the neck. The necking ratio–true strain relationship was determined by an optical microscope observation. The necking ratio was defined as the radius of the neck section divided by the radius of the neck curvature. The true stress–true strain curve after local necking can be evaluated from the average stress–true strain curve and the necking ratio–true strain relationship using an empirical equation up to a true strain of 1.0 regardless of the yield stress of the materials tested. In addition, circumferentially notched tension tests with different notch radii were carried out in a stepwise manner to evaluate the true stress–true strain curves in the neck. Regardless of the initial notch shape, the true stress–true strain relationship after local necking was similar in the notched tension test and in the smooth round tension test.

Key words: true stress; true strain; stepwise tension test; plastic working; necking ratio.

1. 緒言

現行の平滑丸棒引張試験¹⁾では、標点距離を平行部直径の4倍に取り、引張荷重と標点伸びを時々刻々計測し、次式により公称応力と公称ひずみの関係に換算する。

ここに、 σ_n は公称応力、 ε_n は公称ひずみ、 P は引張荷重、 a_0 は平行部の初期半径、 l_0 は初期標点距離、 Δl は標点伸びである。そして、最高荷重点における公称応力を引張強さ、公称ひずみを最高荷重伸びと定義する。

真応力-真ひずみ関係は、体積不变と標点間一様変形を仮定して次式により換算する²⁾。

ここに、 F は真応力、 ε は真ひずみである。

近年、二酸化炭素排出量削減のため、自動車の軽量化を達成させる手段として、ハイドロフォーミング技術を自動車産業が積極的に採用している^{3,4)}。ハイドロフォーミングでは、管材を局部的に最高荷重伸びを超えるまで塑性加

工する場合がある^{4,5)}。例えば、円管のフリーバルジング⁵⁾を考えると、管の半径を局部的に50%広げる場合、拡管部の円周方向の真ひずみは $\ln(1.5)=0.41$ となる。管材の最高荷重伸びが通常0.3以下であることを考えると、これは最高荷重伸びより大きな塑性加工のケースとなる。最高荷重伸びを超える塑性加工を数値シミュレーション等の手法を用いて定量的に評価する為には、最高荷重伸び以降の真応力-真ひずみ関係を知ることが不可欠である。しかし、現行の引張試験の手法によっては、局所くびれの開始までしか信頼性のある真応力-真ひずみ関係を求めることができない。

そこで、著者らは、円周切欠引張試験⁶⁻¹²⁾による真応力-真ひずみ関係の評価を行い、引張荷重と（切欠）くびれ断面直径の関係を計測し、その関係を元に最高荷重点をはるかに超える範囲まで真応力-真ひずみ関係を評価できることを示した¹²⁾。しかし、前報¹²⁾では、時々刻々のくびれの曲率半径は測定しなかった。局所くびれ以降の真応力-真ひずみ線図を確度高く決定するためには、時々刻々のくびれ断面直径およびくびれの曲率半径の実測データが不可欠である。

そこで、本研究では、前報¹²⁾と比べて局所くびれ以降の真応力-真ひずみ線図を、真ひずみが約1.0まで確度高く実測決定することを主たる目的とした。以下、本研究で

行った実験手順を段階的に説明する。

(1) 平滑丸棒引張試験において、断続引張試験法（あるひずみ間隔で引張試験を中断し、径方向変位を実測する）を用いて、時々刻々の荷重とくびれ断面直径を求める。そのデータから以下の計算により平均応力-真ひずみ関係を決定する^{13,14)}。

ここに、 σ は平均応力、 ε は真ひずみ、 P は引張荷重、 a は時々刻々のくびれ断面半径、 a_0 はくびれ断面の初期半径である。

(2) 破断前後の、くびれ底部の曲率半径を実測決定する¹²⁾。本研究では、時々刻々のくびれ断面の半径を時々刻々のくびれの曲率半径で除したものをくびれ比と定義し、測定結果をくびれ比-真ひずみの関係図として整理する。

(3) (1)と(2)で作図した平均応力-真ひずみ線図、及びくびれ比-真ひずみ線図を元に、局所くびれ以降の真応力-真ひずみ線図を次式によって推定した¹⁵⁾。

ここに、 F は真応力、 σ は平均応力、 a は時々刻々のくびれ断面半径、 R は時々刻々のくびれの曲率半径 (a/R はくびれ比となる) である。

(4) 比較のため、切欠半径の異なる円周切欠引張試験においても、断続試験法を行い、(1),(2),(3)と同様の手順で、荷重-くびれ断面直径線図、平均応力-真ひずみ線図、くびれ比-真ひずみ線図を決定した。式(7)より推定した真応力-真ひずみ線図と平滑材のそれとが一致するか確認した。切欠材の断続試験では、切欠形状（くびれ比で整理）がその後の塑性加工によってどのように変化していくかも追隨できる。

2. 実験方法

2・1 供試材

供試材として、市販材の熱間圧延板材（板厚16 mm）と高力ボルト材（直径22 mm）を用いた。Table 1に、供試材の化学成分と引張特性を示す。FP1, FP2が板材で、QT1, QT2及びQT3がボルト材である。同一化学成分で強度の異なる場合の局所くびれ以降の真応力-真ひずみ線図を調べる目的で、熱処理を行った。FP1は、FP2を1200°Cで60分保持後、炉冷したものである。ボルト材は、焼入れ条件は一定とし、焼戻し条件を変えた。すなわち、880°Cで60分

Table 1. Chemical composition and tensile properties of materials tested.

(a) Chemical composition

Material	C	Si	Mn	P	S
FP1					
FP2	0.16	0.44	1.46	0.013	0.004
QT1					
QT2	0.20	0.08	0.96	0.008	0.007
QT3					

(b) Tensile properties

Material	σ_{YS} (MPa)	σ_{TS} (MPa)	M.EL (%)	F.EL (%)	Structure
FP1	251	470	20.0	34.0	F-P
FP2	341	522	18.5	34.0	F-P
QT1	701	763	6.9	20.0	M
QT2	1027	1073	3.8	14.0	M
QT3	1182	1307	3.0	14.0	M

σ_{ys} : 0.2% proof stress, σ_{ts} : Tensile strength, M.EL: Elongation at maximum load, F.EL: Elongation at failure, F-P: Ferrite-pearlite, M: Martensite

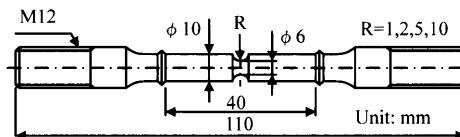


Fig. 1. Circumferentially notched tension specimen.

保持後、水焼入れを行った。その後、焼戻し温度をQT1では550°C、QT2では405°C、QT3では290°Cとして90分保持後、水冷した。

2.2 引張試驗方法

平滑丸棒引張試験では、平行部の直径8 mm、標点距離40 mmのJIS 14A号試験片を用いた。一方、円周切欠き引張試験では、Fig. 1に示す試験片を用いた。標点距離40 mm、くびれ断面の直径6 mmとし、くびれの曲率半径 R を1, 2, 5, 10 mmの4条件とした。すべての試験片を、長手方向が供試材の圧延方向と一致するようにして採取した。引張試験は室温で行い、試験機のストローク速度は0.02 mm/sとした。

引張試験は次のように行った。まず、1本目の試験片を単調連続に破断するまで引張試験を行い、荷重-標点伸び関係を記録する。そのデータをもとに断続引張試験を行った。2本目の試験片を用い、最高荷重点の手前まで負荷をかけ、一旦ストロークを停止して、その時の荷重とくびれ断面直径を記録する。直径は、測定の最小単位が0.01 mm のノギスによって測定した。その後、ストロークを平均して0.3 mm ピッチ（試験状況に合わせ、0.1 mm から0.5 mm の間でピッチを変動させた）で動かし、所定のピッチに達したら再び停止させ、荷重とくびれ断面直径を記録する。その作業を試験片が破断する手前まで繰返し、その後除荷して試験を終了させた（以後、この試験を断続引張試験と

呼ぶ)。試験終了後、くびれ断面の直径とくびれの曲率半径を前報¹²⁾と同じ手法で実測決定し、くびれ比を求めた。

3. 実験結果および考察

3・1 平均応力-真ひずみ関係の実測

断続引張試験では、ストローク停止中に除荷が起き、Fig. 2にFP2, QT1, QT3の平滑材の例で示したように、荷重-標点伸び線図はくしの歯のような形状となった。しかし、Fig. 2に単調連続の引張試験の結果を合わせて示すと、荷重-伸び線図は断続試験と単調試験とでほぼ一致していることが分かる。また、円周切欠き引張の場合も同様の現象が起こるが、断続試験の荷重-伸び線図は単調試験のそれとほぼ一致した。従って、断続試験により得られる荷重-標点伸び線図の再現性は高く、ストローク停止時における除荷の影響は無視できる。

断続引張試験で、ストローク停止中に荷重とくびれ断面直径を測定し、その作業を繰り返すことによって、荷重-くびれ断面直径関係図が得られる。Fig. 3には、平滑材の断続試験で決定した荷重-くびれ断面直径関係図を供試材ごとに異なるシンボルで示した。断続試験法では、最高荷重点及び局所くびれ以降でも荷重-くびれ断面直径関係を決定できる。円周切欠材でも同様に、断続試験により荷重-くびれ断面直径線図を決定できる。Fig. 3に示した実線は、後述する式(19), (20)によって近似した荷重-くびれ断面直径線図である。

次に、平滑材及び円周切欠材の断続試験で決定した荷重-くびれ断面直径関係から、式(5)、(6)により、平均応力-真ひずみ関係に作図し直した結果を、供試材毎にFig. 4(a)~(e)の各図に示す。各図では、それぞれの平滑・切欠試験片毎に異なったシンボルで示してある。なお、QT1, QT2では、1R及び10R切欠材の引張試験は行っていない。この作図法によれば、平滑試験片・円周切欠試験片、初期の切欠形状によらず、すべての平均応力-真ひずみ関係を比較検討できる。計測できるひずみ範囲は、平滑試験片で最も広い。切欠試験片では曲率半径 R が小さくなるほど、ひずみの範囲は小さくなる。また、同じ真ひずみに対しては、平滑試験片の平均応力が他の切欠試験片と比べても最も低く、切欠試験片では初期の曲率半径が小さいほど平均応力は高くなる。

また、Fig. 4には、後述する式(8), (14)~(18)を式(7)に代入して、平均応力を真ひずみの関数として近似した線図も実線で合わせて示してある。

3・2 塑性不安定と局所くびれの開始条件

次に得られたデータを関数化するために、真応力-真ひずみ関係を次式で近似する²⁾。

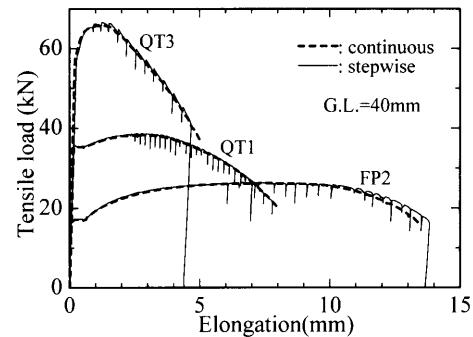


Fig. 2. Comparison of the tensile load-gage elongation curve between the continuous smooth round tension test and the stepwise smooth round tension test for FP2, QT1, and QT3; the curves in the stepwise test and the continuous test concur.

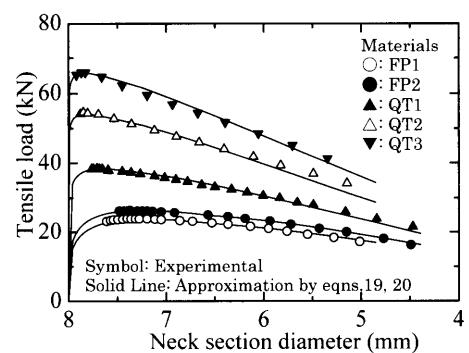


Fig. 3. Tensile load-neck section diameter curves obtained by the stepwise smooth round tension test (which are indicated by symbols) together with the approximations of those by Eqs. (19), and (20) (which are indicated by solid lines). Tensile load and neck section diameter were approximated as functions of the true strain (solid lines).

ここに、 c は応力の次元の係数で、真ひずみが1の時の真応力に相当する。 n は加工硬化係数である。

Table 2 に、供試材の真応力-真ひずみ関係を式(8)で近似した場合に得られた係数をまとめて示す。本研究では、近似の対象とした範囲は、平滑丸棒試験片の単調引張試験から得られた最高荷重点までの真応力-真ひずみ線図に限定した。最高荷重点及び局所くびれ以降の真応力-真ひずみ線図の評価を目的としているので、その比較基準として近似範囲をこのように限定した。ところで、Fig. 2 に示す通り、QT1とFP2 では荷重-標点伸び線図に不連続降伏挙動が生じているが、式(8)による近似においては、この不連続部は除外して考慮している。

塑性不安定の開始条件（最高荷重点にも当たる）は次式で表される¹⁶⁾。

式(8)を式(9)に代入すると次式が得られる。

Fig. 5に、FP2の場合の平滑材における平均応力-真ひずみ

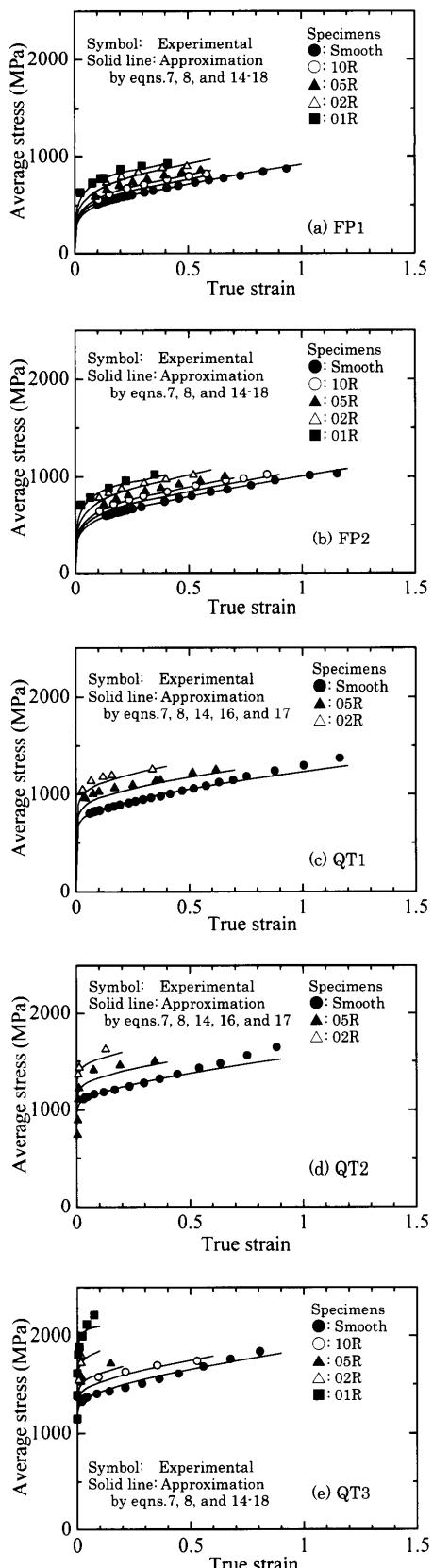


Fig. 4. Average stress-true strain curves in circumferentially notched and smooth round tension tests; (a) FP1; (b) FP2; (c) QT1; (d) QT2; (e) QT3. Symbols: experimentally determined by Eqs. (5) and (6) in the stepwise test. Solid lines: approximations by Eqs. (7), (8), and (14)-(18). The average stress was expressed as a function of the true strain (solid lines).

Table 2. Results of true stress-true strain curve by fitting Eq. (8) for materials tested; c : true stress at a true strain of 1.0. n : strain hardening exponent.

	FP2	FP1	QT1	QT2	QT3
c (MPa)	810	885	1040	1295	1550
n	0.21	0.20	0.09	0.045	0.04

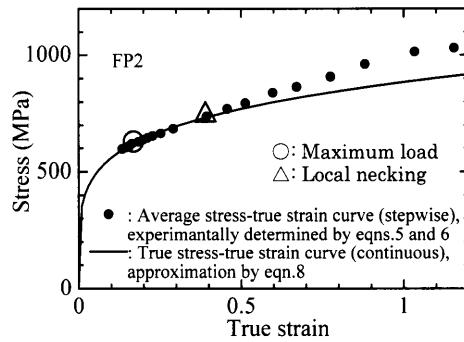


Fig. 5. Comparison between the average stress-true strain curve and the true stress-true strain curve in the smooth round tension test for FP2. Solid circle: Average stress-true strain curve determined by Eqs. (5) and (6) in the stepwise test. Solid line: True stress-true strain curve approximated by Eq. (8) in the continuous test.

み線図と真応力-真ひずみ線図を比較した結果を示す。真応力-真ひずみ線図は式(8)の近似を実線で示し、平均応力-真ひずみ線図はFig. 4(b)の実測値を再掲した。図には、最高荷重点を○で、局所くびれの開始点を△で示した。なお、図では平均応力と真応力の差が開き始める点を局所くびれの開始点と判断した。その結果、最高荷重点の真ひずみは0.18、局所くびれ開始の真ひずみは0.39と求められた。Table 2に示す通り、FP2のn値は0.20であるから、式(10)はほぼ成り立つが、局所くびれは真ひずみで最高荷重点ひずみのほぼ2倍で開始することとなる。

Fig. 5に示す通り、最高荷重点以後も局所くびれの開始まで平均応力と真応力は重なっている。すなわち、この間に局所くびれは発達していないとする判定の妥当性を裏付けている。

ところで、丸棒試験片での系統的な検討は少ないが、薄板の二軸応力場の場合では局所くびれの開始条件に関する系統的な研究があり、局所くびれの開始条件を次式で表している¹⁷⁾。

$$\frac{dF}{de} = F \left[\frac{1 + \sigma_2 / \sigma_1}{2 \sqrt{1 - \sigma_2 / \sigma_1 + (\sigma_2 / \sigma_1)^2}} \right] \quad \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 σ_1 は最大主応力、 σ_2 はそれと直角方向の主応力である。妥当性は今後の検討になるが、この式を援用すると、一軸引張の場合、 σ_2 は0となるから、(11)式は単純に次式となる。

$$\frac{dF}{de} = \frac{F}{2} \quad \dots \dots \dots (12)$$

式(8)を式(12)に代入すると次式が得られる。

FP2の平滑丸棒引張では、局所くびれ開始の真ひずみが0.39、 n 値が0.20であるから、式(13)がほぼ成り立っていることとなる。そこで、本研究では簡単のために、平滑丸棒引張でも式(13)により、局所くびれの開始条件を表すことができると仮定した。しかし、この妥当性も今後鋭意検討されるべき余地を残している。

3.3 くびれ比-真ひずみの関係図

Fig. 4で示した平均応力-真ひずみ関係の実測データ（シンボルで記す）を元に、式(7)より局所くびれ以降の真応力-真ひずみ関係を求めるためには、時々刻々のくびれ比-真ひずみの関係図が必要である。さて、初期くびれ比とは、初期のくびれ断面半径を初期のくびれの曲率半径で除したものである。切欠試験片の場合、初期のくびれ断面半径はすべて3 mmである。従って、くびれの曲率半径 R が 10, 5, 2, 1 mm の円周切欠試験片で初期くびれ比はそれぞれ 0.3, 0.6, 1.5, 3.0 となる。平滑試験片の場合、初期のくびれの曲率半径は無限大として、初期くびれ比は 0 としている。

くびれ断面の半径および光学顕微鏡観察によるくびれの曲率半径の実測決定より求めたくびれ比-真ひずみのデータを、Fig. 6(a)～(e)に平滑試験片・切欠試験片毎に異なるシンボルで示した。ここで、真ひずみは式(6)から決定した。なお、QT1, QT2では $1R$ 及び $10R$ 切欠試験片の引張試験は行っていない。

まず、平滑試験片において、実測データに基づき、データを再現できるように次のモデル式を得た。

Fig. 6(a)～(e)には、式(14)を実線で合わせて示している。3・2節において、平滑試験片では真ひずみが約 $2n$ (n は加工硬化係数) になるまで局所くびれは認められず、平均応力は真応力と等しいとした (Fig. 5 参照)。平均応力と真応力が等しいためには、くびれ比は 0 でなければならない¹²⁾。そこで、式(14)において真ひずみが $2n$ 以下でくびれ比は 0 とした。さらに、真ひずみが $2n$ 以上になると局所くびれが始まり、実験結果に基づき、くびれ比は真ひずみに比例して (傾きが 1.0) 大きくなるとした。

次に、 $2R$, $5R$, $10R$ 円周切欠試験片について、実測データに基づき、データを再現できるように次のモデル式を得た。

$$5R : \frac{a}{R} = 0.6 (\varepsilon \leq 2n), \quad 0.6 + \varepsilon - 2n (\varepsilon > 2n) \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

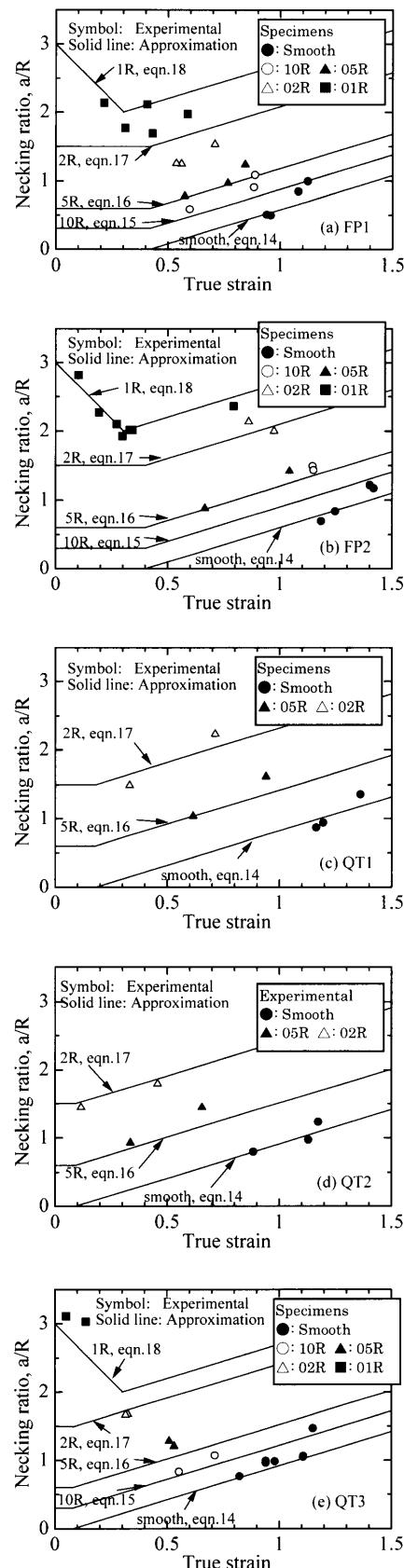


Fig. 6. Relationship between true strain and necking ratio, a/R in the smooth round tension and circumferentially notched tension. The necking ratio was defined as the radius of the neck section divided by the radius of the neck curvature; (a) FP1; (b) FP2; (c) QT1; (d) QT2; (e) QT3. Symbols: Experimentally determined by optical microscope observation. Solid lines: Approximation by Eqs. (14)–(18).

Fig. 6(a)~(e)には、式(15)~(17)を実線で合わせて示している。ここで、切欠試験片でも局所くびれが発生するとして、真ひずみが $2n$ になるまでくびれ比は初期くびれ比のまま変化しないという考え方で推論している。そして、真ひずみが $2n$ になると局所くびれが発生し、それ以降真ひずみに比例して（傾き1.0）、くびれ比は増加するとした。ただし、FP1の $2R$ 切欠試験片とFP2の $10R$ 切欠試験片では、モデル式は実測決定データをあまりよく再現していない。

さて、1R切欠試験片では、他の切欠試験片と異なり、Fig. 6(b)に示すように、くびれ比は最初に真ひずみとともに減少し、その後増加している。その原因の詳しい検討は別報¹⁸⁾に譲るが、ここでは実測データを元に、データを再現できるよう次のモデル式を得た。

Fig. 6(a), (b), (e)には、式(18)を実線で合わせて示している。本報で求めたモデル式(14)～(18)の詳細な検討結果については、別報¹⁸⁾で述べる。以上の検討から、本研究では第一近似として、平滑材試験片は式(14)、切欠試験片では式(15)～(18)のモデル式を用いて、時々刻々のくびれ比を定め、式(7)から平均応力より真応力を推定することとした。

3.4 局所くびれ以降の真応力-真ひずみ線図の推定

Fig. 4 の平均応力-真ひずみ線図の実測データ、および式(14)~(18)のくびれ比-真ひずみ関係モデル式を元に、式(7)から局所くびれ以降の真応力-真ひずみ線図を計算した結果を Fig. 7(a)~(e) に平滑試験片・切欠試験片とで異なるシンボルで示す。Fig. 7 には、式(8)で真応力-真ひずみ線図を近似した結果を実線で合わせて示す。

平滑試験片の作図真応力-真ひずみ関係（シンボル）は、Fig. 7に示すように、供試材によらず真ひずみが約1.0まで評価できる。また、この範囲で式(8)による近似線図とほぼ対応している。

また、切欠試験片において、作図した真応力-真ひずみ関係（シンボル）は、初期の切欠半径に関わらず、平滑試験片のそれと一致し、それらはすべて同一となることが確認できる。

さて、式(8)および式(14)～(18)を式(7)に代入すれば、平均応力は真ひずみの関数として表すことができる。そこで、平均応力を真ひずみの関数として近似した結果をFig. 4に実線で示した。近似結果は実測結果とほぼ対応しており、本研究の推論の妥当性を裏付けている。

また、平均応力が真ひずみの関数として与えられれば、荷重と直径の関係も次式より真ひずみの関数となる。

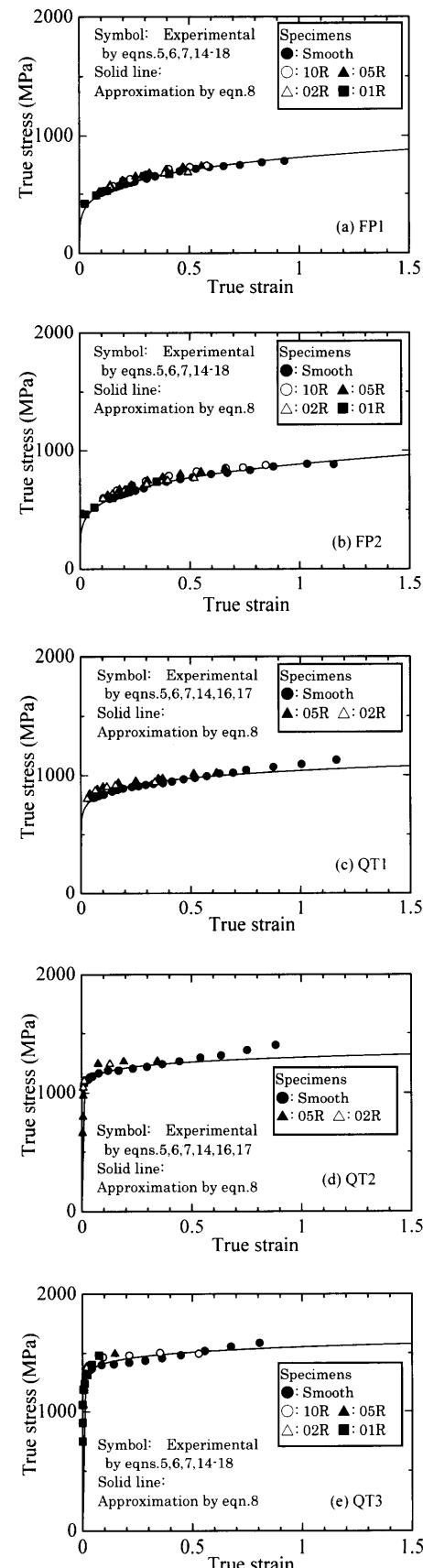


Fig. 7. True stress-true strain curve determined by Eqs. (5), (6), (7), and (14)-(18) in the stepwise tension test (which is indicated by symbols) and its approximation by Eq. (8) in the continuous smooth round tension test (which is indicated by solid lines); (a) FP1; (b) FP2; (c) OT1; (d) OT2; (e) OT3.

ここに、 d は時々刻々のくびれ断面直径、 d_0 はくびれ断面の初期直径である。式(19), (20)により、平滑試験片について荷重-くびれ断面直径の関係を真ひずみの関数として近似した結果をFig. 3に実線で示す。ここでも、実験結果と近似結果とはほぼ対応し、本研究の推論の妥当性を示す。

3・5 断続引張試験の意義

断続引張試験の主たる目的は、平滑試験片において、局所くびれ以降試験片が平行部を持たなくなる場合でも真応力-真ひずみ線図を求めることがある。FP2を例にとると、荷重-標点伸び関係からは真応力-真ひずみ線図は真ひずみにして高々0.20 (n 値) の範囲までしか得られない。しかし、断続引張試験により荷重-くびれ断面直径の関係、及び、除荷後のくびれ比を決定すれば、Fig. 7(b)に示したように、平滑材で実際に真ひずみが約1.1まで有効な真応力-真ひずみ関係が得られ、現行の引張試験法と比べて真応力-真ひずみ線図の実測決定範囲が5倍以上も広がる点が重要である。

さて、最高荷重点伸び及び破断伸びは、Table 1(b)に示す通り、供試材の強度により大きく異なる。例えば、QT3の破断伸びは14.0%であり、FP2のその約40%に過ぎない。しかし、平滑試験片の断続試験で得た荷重-くびれ断面直径線図から作図した平均応力-真ひずみ線図は、Fig. 4(b), (e)に示すように、FP2で真ひずみが約1.1まで、QT3で真ひずみが約0.8まで決定できる。従って、供試材の強度に関わらずこの作図法による平均応力-真ひずみ線図は、実際に真ひずみが約1.0程度まで決定できる点も注目すべき点である。

曲げ加工のスプリング・バック等の塑性加工の数値シミュレーションにおいては、入力する局所くびれ以降の真応力-真ひずみ線図が、解析の精度に直接影響する。今後、本研究の手法を元に得られる、真ひずみが1程度までの真応力-真ひずみ線図を使って、より精度の高い塑性加工シミュレーションができるかどうか検討されるべきである。

4. 結論

局所くびれ以降の真応力-真ひずみ線図（相当応力-相当ひずみ線図とも呼ぶ）を、真ひずみが約1.0まで実測決定することを目的として、平滑丸棒引張試験を試験機のス

トロークを制御して断続的に行った。引張試験は、降伏応力が251 MPaから1182 MPaまでの異なる供試材を用いて行った。本研究で得られた知見を以下に要約する。

(1) 平滑試験片の断続試験により、局所くびれ以降の荷重-くびれ断面直径線図を測定し、それを元にくびれ断面の平均応力-真ひずみ線図を作図した。この方法によって、供試材の強度に関わらず、局所くびれ以降の平均応力-真ひずみ線図を真ひずみが約1.0まで決定できることを示した。

(2) 光学顕微鏡観察により、時々刻々のくびれ比（くびれ断面の半径をくびれの曲率半径で除したもの）と真ひずみを実測決定した。その実測決定データを基に、くびれ比-真ひずみ関係のモデル式を得た。

(3) (1), (2)で求めた平均応力-真ひずみ線図及びくびれ比-真ひずみ関係をモデル式化し、真応力-真ひずみ線図を局所くびれ以降の真ひずみが約1.0まで推定できることを示した。

文 献

- 1) Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials, ASTM E8, (2000).
- 2) Standard Test Method for Tensile Strain-Hardening Exponents (n -Values) of Metallic Sheet Materials, ASTM E646, (2000).
- 3) S.Fuchizawa: *J. Jpn. Soc. Technol. Plast.*, **45** (2004), 25.
- 4) M.Mizumura and Y.Kuriyama: *J. Jpn. Soc. Technol. Plast.*, **45** (2004), 60.
- 5) K.Suzuki and H.Mizukoshi: *J. Jpn. Soc. Technol. Plast.*, **45** (2004), 391.
- 6) K.Enami: PhD Thesis, Tokyo Univ., (2002).
- 7) H.Yoshinari, K.Enami, T.Koseki, H.Shimanuki and S.Aihara: *J. Soc. Naval Arch. Jpn.*, **190** (2001), 559.
- 8) K.Enami and H.Yoshinari: *J. Soc. Naval Arch. Jpn.*, **192** (2002), 493.
- 9) K.Enami and H.Yoshinari: *J. Soc. Naval Arch. Jpn.*, **193** (2003), 57.
- 10) K.Enami: *Eng. Fract. Mech.*, **72** (2005), 1089.
- 11) K.Enami, Y.Hagiwara and H.Mimura: *J. Soc. Naval Arch. Jpn.*, **195** (2004), 263.
- 12) K.Enami and K.Nagai: *Tetsu-to-Hagané*, **91** (2005), 285.
- 13) J.W.Hancock and A.C.Mackenzie: *J. Mech. Phys. Solids*, **24** (1976), 147.
- 14) A.C.Mackenzie, J.W.Hancock, and D.K.Brown: *Eng. Fract. Mech.*, **9** (1977), 167.
- 15) P.W.Bridgman: *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*, McGraw-Hill, New York, (1952), 16.
- 16) R.Hill: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, London, (1960), 12.
- 17) F.A.McClintock and Z.M.Zheng: *Int. J. Fract.*, **64** (1993), 321.
- 18) K.Enami, K.Nagai, S.Torizuka and T.Inoue: *Tetsu-to-Hagané*, submitted.