

円周切欠引張試験による塑性変形限界の評価

榎並 啓太郎*・長井 寿*

Evaluation of Plastic Deformation Limit by Circumferentially Notched Tension Test

Keitaro ENAMI and Kotobu NAGAI

Synopsis : Circumferentially notched and smooth round tension tests were conducted at room temperature with or without compressive prestrain in hot-rolled ferrite-pearlite SM490B steel. And the effects of compressive prestrain and notch acuity on plastic deformation limit were investigated. Plastic deformation limit was defined as the termination point in the true stress-true strain relationship, caused by ductile or cleavage fracture. The average stress-true strain relationship was varied with prestrain and notch acuity, but the true stress-true strain relationship was not. The true strain at the onset of plastic instability was determined by the work hardening exponent, regardless of prestrain and notch acuity. On the other hand, the plastic deformation limit in terms of true strain was varied with prestrain and notch acuity. It was found that the plastic deformation limit can be estimated by the axial stress criterion. The axial stress at plastic deformation limit was about 1300 MPa, regardless of ductile and cleavage fracture.

Key words : plastic deformation limit; ductile fracture; cleavage fracture; axial stress; true strain.

1. 緒言

二酸化炭素削減、省資源、省スペース、省エネルギー等のキーワードが近年、我が国で盛んに用いられている¹⁾。鉄骨建築物・自動車の製作に当たり、製作段階のコストだけでなく、その後の維持・管理・リサイクルに重点が移りつつある。これらの社会的なニーズを背景として、鉄骨建築物・自動車の軽量化に大きな関心が寄せられている。この課題を達成するには、厚板・薄板の鋼板素材の高強度化が必須の要件となる²⁾。

その一方で、鉄骨建築物では大地震に対する吸収エネルギーを確保するため、また自動車では衝突安全性の観点から、鋼材の強度だけでなく塑性変形能力が重要視される³⁾。従って、塑性変形の限界を定量的に評価できる基準の確立は重要な課題である。鉄骨建築物・自動車の変形限界を評価するためには、まず、鋼材素材の塑性変形限界を支配する因子を明らかにしなければならない。

塑性変形限界は素材の延性破壊（もしくは、劈開破壊）の発生点に対応付けられる。素材の延性破壊の起こりやすさは、素材の加工履歴、変形温度、ひずみ速度さらに変形域の応力三軸度等により変化する。

そこで本研究では、30%までの圧縮予ひずみに変化を与えた熱間圧延材 JIS-SM490B 材を対象とし、円周切欠試験片を用いることにより、応力状態を変化させて引張試験した際の塑性変形限界を求めて、塑性変形限界を支配する因

子を検討した。

また、切欠の有無が塑性変形限界に及ぼす影響を比較するため、平滑丸棒引張試験による評価も行った。

2. 実験方法

供試材は板厚 16 mm の JIS-SM490B 鋼材 (0.16C-0.44Si-1.46Mn-0.013P-0.004S (mass%)) である。供試材を用いて以下の実験を行った。

2.1 圧縮予ひずみ材の円周切欠引張試験

供試材から長さ 50 mm、幅 40 mm、厚さ 16 mm の角材を採取し、圧延方向にダイプレスで圧縮し、0%、10%、30% の圧縮予ひずみを室温で与えた。ダイプレスにより、特に 30% 予ひずみ材の場合で樽型変形が大きくなった。そして、予ひずみ方向と試験片の長手方向が平行になるように、切欠断面を樽型変形サンプルの腹部中央に対応させ、Fig. 1 に示す円周切欠試験片を採取した。円周切欠の半径を 1, 2,

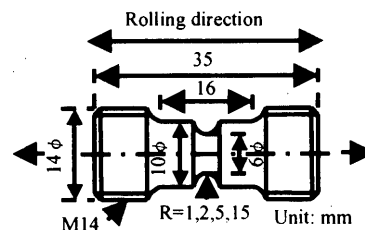


Fig. 1. Circumferentially notched tension specimen.

5, 15 mm に変えることで、応力状態を変えた。切欠深さは、いずれの場合も 2 mm である。引張試験は室温で実施し、ストローク速度は 1.0 mm/min とし、荷重-切欠断面直径の変化を計測した。試験方法の詳細は、別報^{4,7)}にて報告してある。

2.2 素材の平滑丸棒引張試験

供試材の圧延方向と試験片の長手方向を平行にして、平行部の直径が 8 mm、標点距離が 40 mm の JIS 14A 号試験片を採取し、室温で引張試験を実施した。試験機のストローク速度を 1.2 mm/min とし、荷重と標点伸びの関係を計測した。

2.3 切欠断面の応力・ひずみ状態

Fig. 2 に、全面降伏した後の円周切欠断面の応力・ひずみ状態を模式的に示す。中心軸を Z 軸とし、断面中央を原点として径方向に X 軸を取って示した。ここに、 R はくびれの曲率半径、 a は時々刻々の切欠断面の半径、 σ_z は軸応力、 σ_x は径方向応力、 σ_y は周方向応力、 σ は平均応力、 F は真応力（又は相当応力）、 ε は真ひずみ（又は相当ひずみ）である。くびれの影響で、切欠断面は 3 軸応力状態となる。ここで、真応力と真ひずみは、切欠断面に渡って一定と仮定する。平均応力と真応力、真ひずみは、次式で表される⁸⁻¹⁰⁾。

$$\sigma = \frac{P}{\pi a^2}, \quad P = \int_{x=0}^a 2\pi X \sigma_z dX \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\varepsilon = 2 \cdot \ln \frac{a_0}{a} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 P は引張荷重、 a_0 は切欠断面の初期半径である。一方、軸応力は断面中央で最大、切欠表面で最小となり真応力と等しい。軸対称性を考慮して、 $\sigma_x = \sigma_y$ を式(2)に代入すると、軸応力は次式で表される。

$$\sigma_z = F + \sigma_x \quad \dots\dots\dots (4)$$

Bridgman は、切欠断面中央の最大軸応力と真ひずみの関係を次式で表した¹⁰⁾。

$$\sigma_z = F \left(1 + \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right) \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

平滑丸棒引張試験では、くびれが発生するまで一軸応力状態であるので、 $\sigma_x = \sigma_y = 0$ 、 $\sigma_z = F$ となる。これを式(1)に代入すると平均応力と真応力は等しくなる。すなわち、

$$\sigma_z = \sigma = F \quad \dots\dots\dots (6)$$

一方、円周切欠引張試験では 3 軸応力状態となるから、軸応力分布は式(4)で表され、これを式(1)に代入すると、次式が得られる。

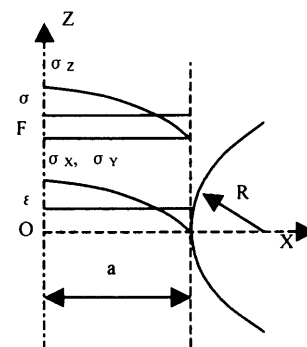


Fig. 2. Stress and strain state in the notched cross section after general yielding.

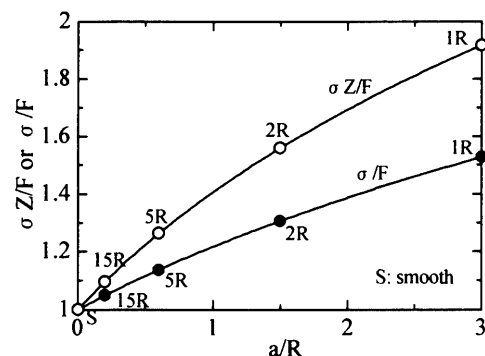


Fig. 3. Relationship between σ_z/F , σ/F and a/R .

$$\sigma = F + \frac{1}{\pi a^2} \int_{x=0}^a 2\pi X \sigma_x dX \quad \dots\dots\dots (7)$$

従って、円周切欠引張試験において平均応力は真応力よりも常に大きい。Bridgman は、平均応力と真応力の関係を次式で表した¹⁰⁾。

$$\sigma = F \left(1 + 2 \frac{R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

Fig. 3 は、式(5)と式(8)を図で表したものである。ここで、 $a = a_0 = 3 \text{ mm}$ とし、くびれの曲率半径が $R = 1, 2, 5, 15 \text{ mm}$ の場合について、データをプロットしている。 a/R が大きくなるほど、平均応力、断面中央軸応力は真応力よりも大きくなる。

3. 実験結果

3.1 円周切欠引張試験

Fig. 4(a)~(c) に、円周切欠引張試験の荷重-切欠断面直径の関係を示す。最高荷重到達点（塑性不安定の開始） $P_{\max}$ を Δ で、荷重-変位曲線の折れ曲がり点 P_f を $\circ$ で示した。最高荷重は切欠半径が小さくなると増加するが、最高荷重における断面直径は切欠半径に関わらずほぼ一定となる。破面形態としては、0%–1R, 2R, 5R, 15R, 10%–1R, 2R, 5R, 15R, 30%–2R, 5R, 15R の各試験片は延性的な破面で

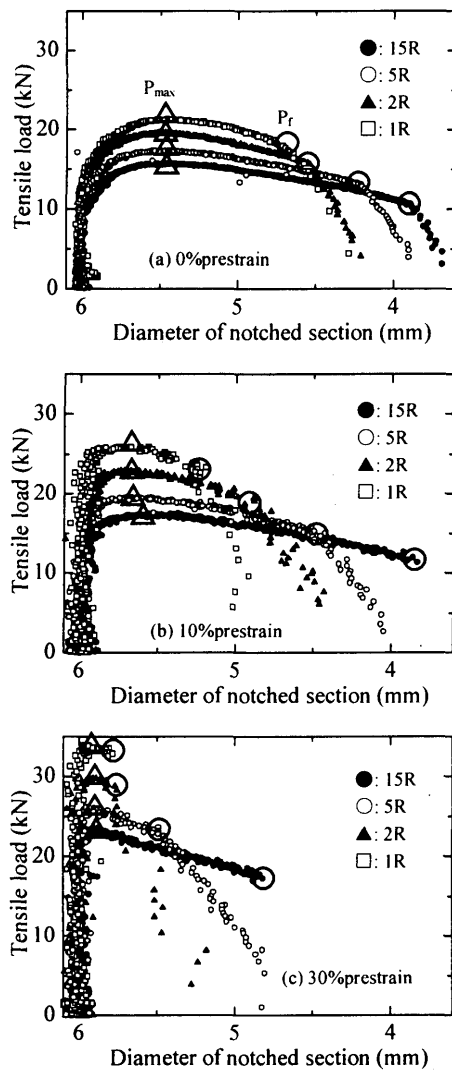


Fig. 4. Relationship between tensile load and diameter of notched section in notch tension test; (a) 0% prestrain; (b) 10% compressive prestrain; (c) 30% compressive prestrain.

あった。但し、10%-1R材、30%-2R材には局部的に劈開面も観察された。一方、30%-1R材は劈開破面であった。

Fig. 5(a)~(c)に、Fig. 4の荷重-変位関係から式(1)、式(3)に基づいて変換した平均応力-真ひずみの関係を示す。図には、平均応力-真ひずみ関係の近似曲線も合わせて示した。近似曲線は、後述する真応力-真ひずみ曲線の近似式(式(11))において、真応力を平均応力に置き換えて求めた。図の印(○, △)は、Fig. 4で示した印に対応する点である。図に示した通り、Fig. 4の荷重-直径曲線上の折れ曲がり点は、平均応力-真ひずみ曲線からの離脱点に対応する。平均応力-真ひずみ曲線からの離脱点の決定には、任意性が少ないので、この離脱点を塑性変形限界と定義することにした。Hancockらは、この離脱点を延性破壊発生の基準としている^{8,9)}。こうすると、荷重-変位曲線上で定義される塑性不安定開始点と塑性変形限界は明瞭に区別できる。

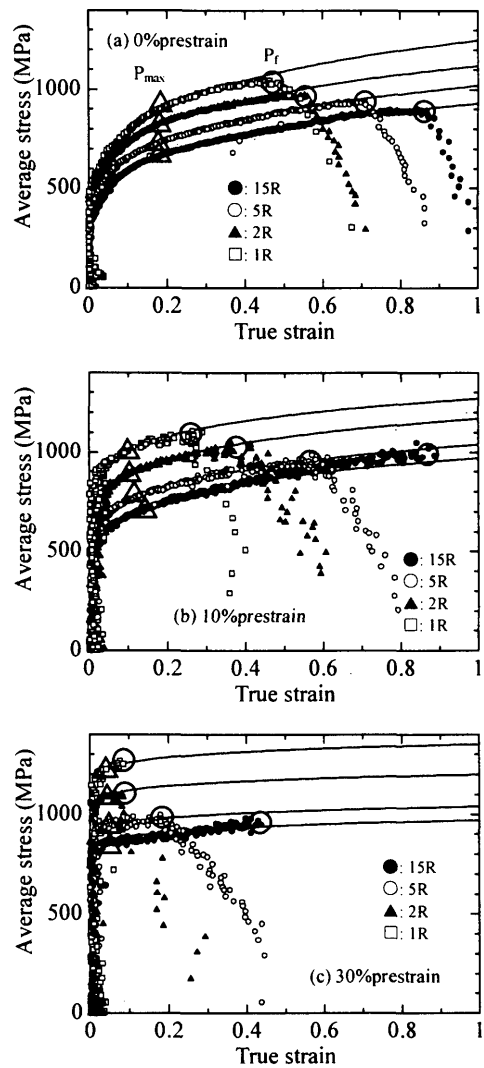


Fig. 5. Relationship between average stress and true strain; (a) 0% prestrain; (b) 10% prestrain; (c) 30% prestrain.

Fig. 6に、式(8)によってFig. 5に示した平均応力-真ひずみ関係を変換して求めた真応力と真ひずみの関係を示す。図(a)には、後述する0%予ひずみ材平滑材の結果を応力-ひずみ線図の近似曲線と合わせて示してある。図(a)を見ると、切欠材の真応力-真ひずみ関係は、平滑材のそれと一致する。但し、1R切欠材では、式(8)から求めた真応力-真ひずみ線図が平滑材のそれからすこし外れている。図(b), (c)に示す通り、10%, 30%予ひずみ材でも、切欠半径に関わらず真応力-真ひずみ関係は1本の線図で表され、不変である。

Fig. 7は、予ひずみに相当する真ひずみを加算した累積相当塑性ひずみと真応力の関係を、15mmR円周切欠材の場合について示したものである。予ひずみに相当する真ひずみは次式により計算される¹¹⁾。

$$\varepsilon = \ln \left(\frac{1}{1 - \varepsilon_{pre}} \right) \dots \dots \dots (9)$$

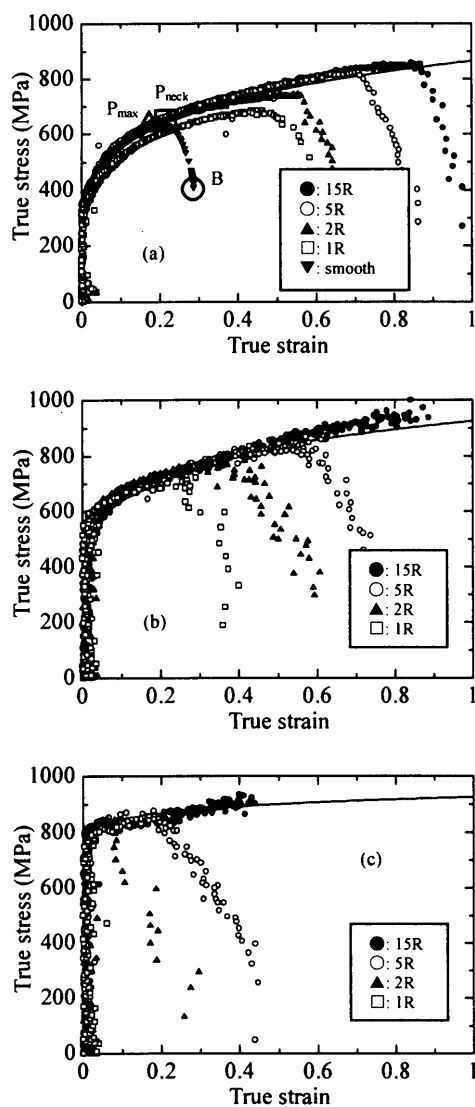


Fig. 6. Relationship between true stress and true strain corrected by Eq. (8): (a) 0% prestrain; (b) 10% prestrain; (c) 30% prestrain.

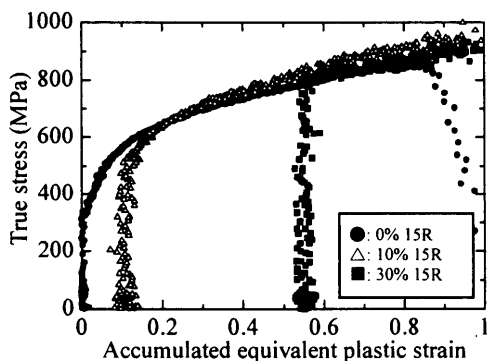


Fig. 7. Relationship between accumulated equivalent plastic strain and true stress in case of 15R notched specimen.

ここに、 ε は圧縮ひずみに相当する真ひずみ、 ε_{pre} は圧縮ひずみである。なお、30%ひずみ材は、累積相当塑性ひずみ-真応力線図が1本の線で整理されるように、真ひずみ55%（ひずみ40%相当）を加算した。特に、30%

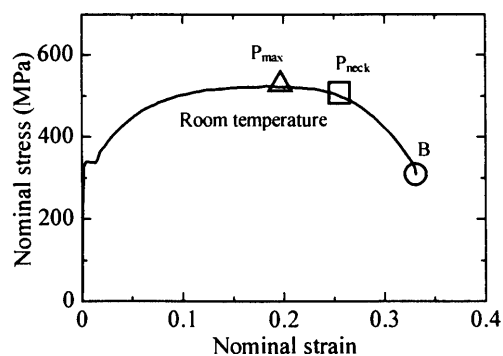


Fig. 8. Nominal strain-nominal stress curve obtained by the smooth round tension test at room temperature.

予ひずみ材では、ダイプレスによる樽型変形が大きくなったため、樽型の腹部中央では、局部的に30%以上の予ひずみが導入された可能性もある。

3.2 平滑丸棒引張試験

Fig. 8に、平滑丸棒引張試験から得た公称応力-公称ひずみ関係を示す。塑性不安定の開始を△、局所くびれの開始を□、破断開始点を○で示した。図に示す通り、塑性不安定の開始後も局所くびれが開始するまで荷重保持力はほぼ一定を保つ。

Fig. 6(a)には、Fig. 8から作図した真応力-真ひずみ関係を示している。Fig. 6(a)には、Fig. 8の△、□、○に対応する個所を同じマークで示した。図に示す通り、局所くびれの開始点まで、平滑材の真応力-真ひずみ線図は円周切欠材のそれらと重なる。実験データの作図では、局所くびれ以降は見かけ上真応力が減少しているが、くびれ断面では真応力は増加しており、真応力-真ひずみ曲線の近似曲線上にプロットされるはずである。

4. 考察

4.1 塑性不安定の開始条件

塑性不安定の開始条件は次式で与えられる¹¹⁾。

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = F \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 F は真応力、 ε は真ひずみである。

一方、真応力-真ひずみ関係を次式で近似する。

$$F = c \cdot \varepsilon^n \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 c は定数で、 n は加工硬化係数である。Fig. 6に示した通り、式(11)により真応力-真ひずみ線図を精度よく近似できる。なお、0%予ひずみ材は平滑材の結果から、また、10%材、30%予ひずみ材では、15R切欠材の平均応力を式(8)により真応力に変換して、真応力-真ひずみ線図の近似式を求めた。その結果、0%予ひずみ材で $c=865$ 、 $n=0.190$ 、10%予ひずみ材で $c=926$ 、 $n=0.150$ 、30%予ひずみ材で $c=926$ 、 $n=0.040$ となった。

式(11)を式(10)に代入すると、

$$\varepsilon = n \dots \dots \dots (12)$$

となり、良く知られるように塑性不安定開始の真ひずみは加工硬化係数に等しい。Fig. 5に示す通り、10%予ひずみ材でややばらつきのあるものの、塑性不安定開始の真ひずみは切欠半径に関わらず一定となり、その値は加工硬化係数とほぼ対応している。つまり、塑性不安定開始の限界真ひずみは、材料の真応力-真ひずみ特性から唯一に定まる性質があり、切欠形状には左右されない。

4.2 平滑丸棒試験片における塑性変形限界の真ひずみの推定

Fig. 9に、0%予ひずみ切欠材(1, 2, 5R)について、塑性変形限界(破壊発生)の真ひずみと破断後の真ひずみを比較した図を示す。試験片破面の半径を測定し、式(3)から破断ひずみを求めた。図に示す通り、破壊発生ひずみと破断ひずみとは異なる。

円周切欠材の塑性変形限界の真ひずみは、Fig. 5 (又は、Fig. 6) から直ちに読み取られる。しかし、平滑材のくびれ断面の限界真ひずみは直ちには求まらない。そこで、平滑材の塑性変形限界の真ひずみを以下の手順で推定した。

平滑材において、局所くびれが開始するまでは、真応力と公称応力との間には次式の関係がある。

$$F = \sigma_n \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 σ_n は公称応力である。さらに、式(3)と式(11)を式(13)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{c \cdot \varepsilon^n}{\exp(\varepsilon)} = \sigma_n \dots \dots \dots (14)$$

厳密には、局所くびれが発生すると式(13)は成立しないが、一つの目安として用いた。Fig. 8に示したB点が円周切欠引張試験における塑性変形限界の P_f 点に対応すると仮定して、B点の公称応力307MPaを代入し、式(14)を解くと限界真ひずみは1.047と計算される。一方、破面より測定した破断真ひずみは1.417であった。Fig. 9に示すように、破壊発生ひずみと破断ひずみの差は、切欠半径によらずほぼ一定となっており、平均するとその差は0.357である。平滑材では推定した破壊発生ひずみと破断ひずみの差は0.37となり、オーダー的に一致している。従って、平滑材の塑性変形限界の推定真ひずみは妥当な値であると考えられる。

4.3 塑性変形の限界(破壊発生)条件

Fig. 5に示した通り、切欠半径が小さくなると塑性変形限界の真ひずみは小さくなり、平均応力は高くなる。また、圧縮予歪により塑性変形限界の真ひずみは小さくなり、その傾向は30%予ひずみ材で特に著しい。

破壊は、劈開でも延性でも、応力的に最も厳しい場所か

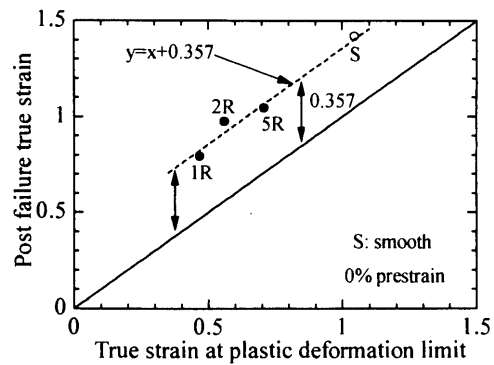


Fig. 9. Relationship between true strain at plastic deformation limit and post failure true strain in notched tension test in case of 0% prestrain.

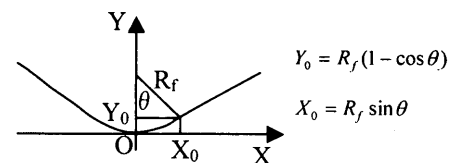


Fig. 10. Measurement method of radius of curvature in the neck.

ら発生するとする、局所応力仮説が主張されている¹²⁻¹⁴⁾。切欠半径が1mmより大きい円周切欠引張の場合、Fig. 2に示した通り、断面中央で最も軸応力が高くなるから、中央から破壊すると考えられ、過去の実験でもそれが確かめられている^{8,9,13)}。

平滑丸棒引張試験では、局所くびれの開始以降、くびれ断面に塑性変形が集中し、くびれが発達する。そこで、塑性変形限界のくびれの曲率半径Rを破断した試験片から次の方法により推定した。破断した試験片をつなぎ合わせ、光学顕微鏡によりくびれ底部の投影像(倍率50)を撮影する。Fig.10に示すように、くびれ底を原点として試験片の長手方向にX軸を、それと直角にY軸を取り、くびれ投影線上の1点の座標 X_0 , Y_0 を測定する。そして、幾何学的な関係より、Fig.10に示す連立方程式を解き、曲率半径 R_f を求めた。測定のばらつきを小さくするため、 Y_0 は0.2mmで固定した。また、別途引張試験を実施した1R, 2R, 5R, 10R円周切欠材¹⁵⁾について、同様の手法で切欠底部の曲率半径を測定した。一方で、破断面の半径 a_f を測定し、破断した試験片の a_f/R_f を求めた。Fig.11に、そのようにして求めた a_f/R_f と初期の a_0/R_0 の関係(a_0 :初期切欠断面半径、 R_0 :初期曲率半径)を示す。

Fig.11に示した a_f/R_f を元に、0%予ひずみ材について、塑性変形限界における断面中央の軸応力 σ_z を式(5)により計算した。塑性変形限界の真応力は、切欠材についてはFig. 6(a)から読み取り、平滑材については式(11)に限界真ひずみ1.047を代入して推定した。なお、15R切欠材の a_f/R_f は、Fig.11に示す近似曲線から推定した。厳密には塑性変形限界における a/R を用いて軸応力を計算する必要が

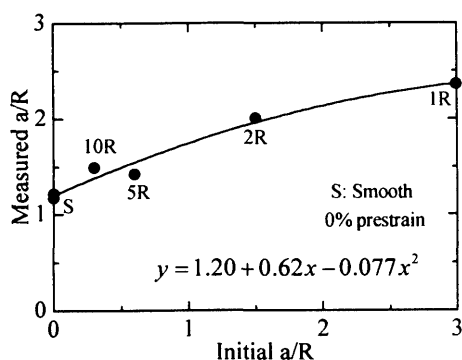


Fig. 11. Relationship between initial a_0/R_0 and measured a_f/R_f after fracture (a : radius of necked section, R : radius of neck curvature).

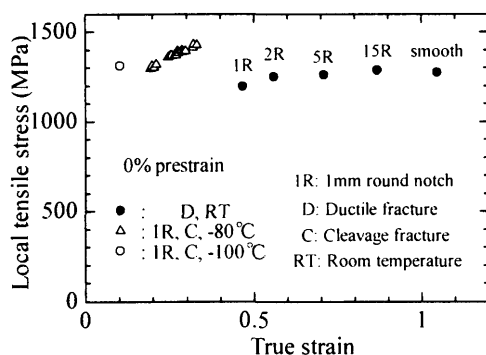


Fig. 12. Relationship between axial stress and true strain at the plastic deformation limit.

あるが、ここでは目安として破断した試験片から測定した a_f/R_f を用いた。

Fig.12に、0%予ひずみ材について、塑性変形限界の真ひずみと軸応力の関係を示す。10%予ひずみ材、30%予ひずみ材は、 a_f/R_f の測定を行っていないのでデータを載せていない。Fig.12には、 -80°C 及び -100°C で別途実施した、1R円周切欠引張試験の結果も示す¹⁵⁾。この温度では、全て劈開破壊が生じる。劈開破壊した試験片では、破壊発生と破断後の真ひずみはほぼ等しいと考えられるので、破断面半径を測定して式(3)より真ひずみを求めた。一方、破壊荷重を元に、式(1)より平均応力、式(8)より真応力を求め、破壊した試験片をつなぎ光学顕微鏡写真より a_f/R_f を測定し、式(5)により軸応力を求めた。

延性破壊した室温の試験片の限界軸応力に注目すると、平滑材は1274 MPa、15R材は1285 MPa、5R材は1259 MPa、2R材は1250 MPa、1R材は1194 MPaとやや低いが、限界応力は切欠の有無に関わらずほぼ一定となる。Fig. 6(a)に示した通り、1R材では式(8)から求めた真応力が他の材と比べ少し低かった。もし、Fig. 6(a)において、1R材の真応力を平滑材の結果から求めた真応力-真ひずみ近似曲線の上に乗せてみると748 MPaとなり、これを式(5)に代入して限界応力を計算すると1332 MPaとなる。

一方、劈開破壊した1R切欠材の限界応力は、 -100°C で1309 MPa、 -80°C で1294~1426 MPaと計算された。劈開

の場合の限界応力は、真ひずみの増加によりやや高くなる傾向のあるものの、ほぼ一定と考えられる。従って、本論文の結果はばらつきはあるが、塑性変形限界の軸応力は、破壊が延性か劈開かに関わらず、約1300 MPaでほぼ一定となる可能性を示唆している。Fig.12で見ると、延性-劈開遷移の目安は、真ひずみ0.3~0.45の範囲にある。これは、大塚らが延性-脆性遷移の限界真ひずみの目安を約0.3と報告していることともほぼ符合する¹³⁾。

4.4 円周切欠引張試験の実用的な意義

本研究では、塑性不安定と塑性変形限界が明瞭に異なることを強調した。塑性不安定は、式(10)によって表され、素材の真応力-真ひずみ線図と関係付けられる。一方、塑性変形限界は引張軸応力により評価される。鋼構造物の塑性変形能力の評価において、一様伸びが重要視される。しかし、式(12)に示した通り、一様伸び(又は、加工硬化係数)は塑性不安定の尺度である。

円周切欠引張試験の特長は、Fig. 6(a)に示した通り、塑性不安定を超えてからも広範囲に真応力-真ひずみ関係を計測できることである。平滑丸棒引張試験では、真応力-真ひずみ線図が有効に計測できるのは局所くびれの開始までで、本研究では真ひずみが0.2以下の範囲に限られる。一方、15mmRの円周切欠引張試験の場合、真ひずみが0.8の範囲まで真応力-真ひずみ線図を計測できる。その結果、式(11)の近似式が広範囲にわたり真応力-真ひずみ関係を精度よく表すことが示された。

塑性変形限界の軸応力を約1300 MPaと具体的な数値で示した点が本試験では最も重要である。この値を目安として、例えば、鉄骨建築物の柱・梁接合の応力集中部位(スカラップ底など)の塑性変形限界を評価すること、或いは、ハイドロフォーミング等の塑性加工限界を明らかにすることなどが期待される。そのためには、鉄骨建築・塑性加工の現場を理解すること、数値シミュレーションの積極的な活用が今後の課題となる。

4.5 今後の検討課題

(1) 本研究では、主として塑性変形限界に及ぼす切欠形状と圧縮予ひずみの影響を調べた。今後、塑性変形限界に及ぼすひずみ速度・温度の影響も調べる必要がある。塑性変形限界が軸応力一定条件で決まるとすれば、温度の低下、ひずみ速度の上昇により、塑性変形限界の真ひずみは小さくなると予想される。

(2) 化学組成の等しい材料で、強度レベルを揃え、ミクロ組織のみ変えたサンプルを準備し、塑性変形限界に及ぼす微視組織の影響を評価することなどによって、微視組織と塑性変形限界の関係を系統的に調べていく必要がある。

5. 結論

本研究では、JIS-SM490B材を供試材として、円周切欠引張試験による塑性変形限界の評価手法について検討した。本研究で得られた結論を以下に要約する。

(1) 円周切欠引張では、塑性不安定を経て塑性変形限界に至る。塑性変形限界は、真応力（または、平均応力）-真ひずみ曲線からの離脱点として定義される。一方、平滑丸棒引張では、塑性不安定、局所くびれの発生を経て塑性変形限界に至る。

(2) 真応力-真ひずみ曲線は、平滑丸棒引張、円周切欠引張に関わらず、不変である。

(3) 塑性不安定開始の真ひずみは、加工硬化係数とほぼ1対1に対応し、切欠形状には左右されない。

(4) 圧縮予ひずみ、切欠形状により、円周切欠引張試験における塑性変形限界の真ひずみは変化した。

(5) 塑性変形限界の軸応力は、本研究による推定方法によると、延性破壊、劈開破壊に関わらず、約1300 MPaでほぼ一定となった。

文 献

- 1) Y.Tomoda, K.Harada and T.Nagasaka: *Materia Jpn.*, **42** (2003), 777.
- 2) S.Torizuka, K.Nagai and A.Sato: *J. Jpn. Soc. Technol. Plast.*, **42** (2001), 287.
- 3) A.Wada: Proc. of the 8th Ultra-Steel Workshop, NIMS, Tsukuba, (2004), 50.
- 4) K.Enami: Ph.D. Thesis, Tokyo Univ., (2002).
- 5) H.Yoshinari, K.Enami, T.Koseki, H.Shimanuki and S.Aihara: *J. Soc. Naval Arch. Jpn.*, **190** (2001), 559.
- 6) K.Enami, H.Yoshinari: *J. Soc. Naval Arch. Jpn.*, **192** (2002), 493.
- 7) K.Enami: *Eng. Fract. Mech.*, to be published.
- 8) J.W.Hancock and A.C.Mackenzie: *J. Mech. Phys. Solids*, **24** (1976), 147.
- 9) A.C.Mackenzie, J.W.Hancock and D.K.Brown: *Eng. Fract. Mech.*, **9** (1977), 167.
- 10) P.W.Bridgman: *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*, McGRAW-Hill, New York, (1952), 16.
- 11) R.Hill: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, London, (1960), 12.
- 12) T.Miyata, T.Tagawa and S.Aihara: *Tetsu-to-Hagané*, **81** (1995), 583.
- 13) A.Otsuka, T.Miyata, S.Nishimura and M.Ohashi: *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. A*, **47** (1981), 286.
- 14) K.Terasawa, M.Otani, K.Terai and F.Kanatani: *J. Soc. Naval Arch. Jpn.*, **117** (1965), 227.
- 15) K.Enami, Y.Hagiwara and H.Mimura: *J. Soc. Naval Arch. Jpn.*, **195** (2004), 263.