

電磁熱流体力学の基礎と応用(III)

棚橋隆彦*

Takahiko TANAHASHI

Theory and Application of Thermo-Magneto Hydro Dynamics (III)



慶応義塾大学理工学部教授
棚橋 隆彦

1941年 1月24日生
1964年 慶応義塾大学工学部機械工学科卒業
1969年 工学博士（慶応義塾大学）
1970年 カリフォルニア工科大学（C. I. T.）の客員研究員
1985年 慶応義塾大学理工学部教授
1986年 サザンプトン大学の客員教授
1987年 マサチューセッツ工科大学（M. I. T.）の客員教授
現在 慶応義塾大学理工学部教授

7 GSMAC-FEMによる数値解析

計算領域の支配方程式と境界条件が整うと、基礎方程式を離散化することによって数値計算が可能となる。数値解析の手法は一般に差分法・有限要素法・境界要素法に分類できる。ここではその中で最も実用性のある有限要素法について調べる。GSMAC有限要素法は差分法の分野でよく知られているMAC法を有限要素法に拡張したものである。GSMAC-FEMによる電磁熱流体解析について考察することにする。この章の内容は以下の通りである。

- 7・1 数値解析の手法
- 7・2 GSMAC法
- 7・3 GSMAC法による電磁流体の解析
- 7・4 GSMAC法による電磁熱流体の解析
- 7・5 空間の離散化と係数行列
- 7・6 計算例

この章に関してはGSMAC-FEM [棚橋 (1991)] を参照するとよい。

7・1 数値解析の手法

現在多く用いられる数値解析の手法は表39の3つに分類

される。Navier-Stokes方程式の解法としては差分法が最も発達しているが、複雑形状の実用化問題には格子を作る段階で多くの問題がある。これを克服するのが汎用性のある有限要素法である。しかし有限要素法にもいくつかの欠点がある。その最大の欠点は記憶容量が大きいこと、計算スピードが遅いことである。したがって有限要素法で汎用性があり、差分法と同程度の計容量で済む高速計算手法の開発が望まれる。この目標への試みがここに述べるGSMAC-FEMである。参考のため図25に各種計算手法の関係を体系的に示しておく。

表39 数値解析の手法

・差分法（有限体積法）	FDM
・有限要素法	FEM
・境界要素法	BEM

平成4年1月16日受付 平成4年9月4日受理 (Received on Jan 16, 1992; Accepted on Sep. 4, 1992) (依頼講義)

* Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi Kohoku-ku Yokohama 223

Key words: MHD(magneto hydro dynamics); plasma; magnetic fluid; liquid metal; FEM(finite element method); CFD(computational fluid dynamics); thermo fluid; theory of micropolar fluid.

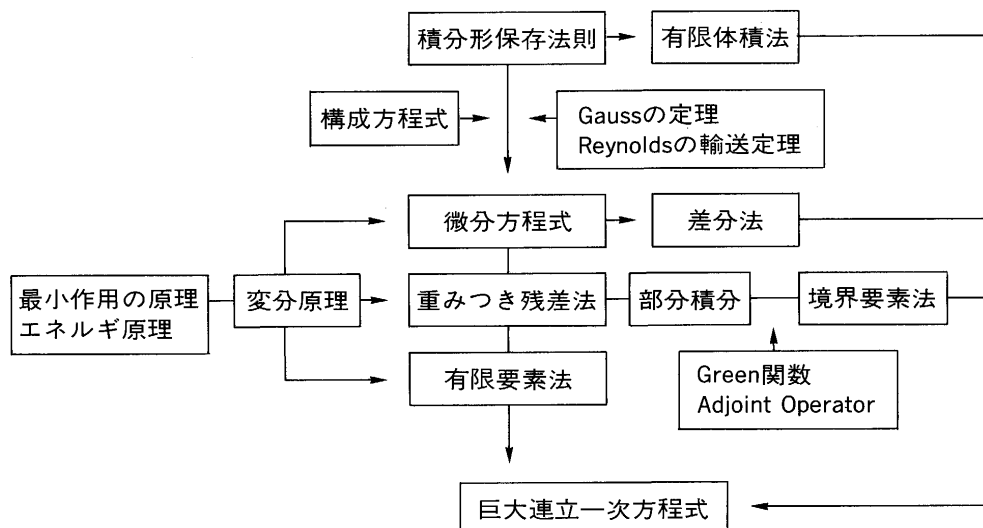


図25 数値解析の体系

(i) 分離解法・非分離解法

速度と圧力を同時に解く方法を非分離解法、速度と圧力を分離して解く手法を分離解法とよぶ。GSMAC-FEMでは分離解法を採用している。分離解法には表40に示すような問題が現在残されている。

表40 分離解法と非分離解法

非分離解法

分離解法

分離解法の問題点

圧力ステップが最後 → 境界上で境界に水平方向の運動方程式を満たさない。

粘性ステップが最後 → 連続の方程式を満足しない。

(ii) 構造格子・非構造格子

構造格子は一般に差分法で用いられ計算効率が高い。それに反して非構造格子は格子生成が容易で形状適合性が高い。GSMAC-FEMは非構造格子を用いて計算効率を高めている (表41参照)。

表41 構造格子と非構造格子の特長

	格子生成	形状適合性	計算効率
構造格子	×	×	◎
非構造格子	◎	◎	×

(iii) 陰解法・陽解法

陰解法は安定条件が緩いので大きな Δt がとれる。しかし高周波成分の計算精度に保証がない。よってGSMAC-FEMでは陽解法を採用している。陽解法はアルゴリズムが単純であるが安定条件がきびしい (表42)。

表42 陽解法と陰解法の利点と欠点

	利点	欠点
陰解法	安定条件が緩い $\Delta t \cdots$ 大	高周波成分の計算精度の保証がない。
陽解法	アルゴリズムが単純	安定条件がきびしい。 $\Delta t \cdots$ 小

(iv) 変数配置

変数配置は離散化の手法と大きく関係する。2次元での代表的な手法を図26に示す。MAC法の変数配置は圧力振動や速度振動を防止するのに適している。有限要素法ではMAC法のStaggered配置をとることが困難なので、GSMAC法ではALE配置を採用し、圧力振動を防ぐ対策を用いている。Normal配置は圧縮性流体の数値解析で多く用いられているものである。

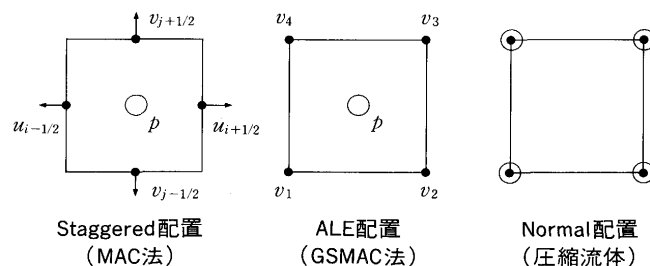


図26 変数配置

7・2 GSMAC法

(i) MAC法の発展

MAC法の歴史的な発展過程を図27に示す。MAC法、SMAC法、HSMAC法は米国ロス・アラモス研究所で開発された差分法のアルゴリズムである。このアルゴリズムを有限要素法に応用したものがGSMAC法である。

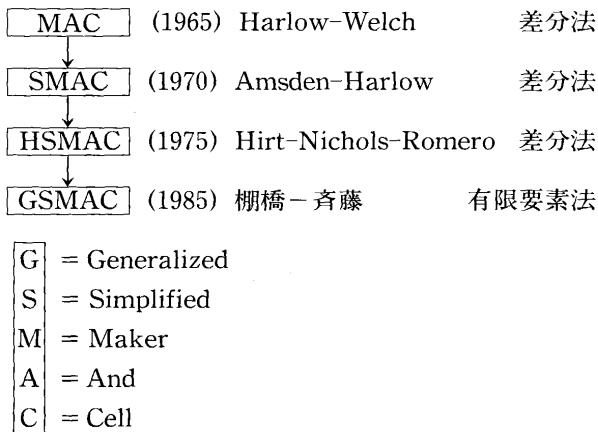


図27 MAC法の歴史

(ii) GSMAC法

GSMAC法は差分で開発されたHSMAC法のアルゴリズムを基本とし、有限要素法で定式化している。Poisson方程式の解法にはFluxの保存を重視した有限体積法を用いている。すなわち、FDM、FEM、FVMの特長を一つの計算手法の中に取り入れたものがGSMAC法の特長である(図28参照)。一般に有限要素法は図29に示された特長を持っている。

[I] Algorithm	差分法 (FDM)
[II] Formulation	有限要素法 (FEM)
[III] Fluxの保存	有限体積法 (FVM)

図28 GSMAC法の特長

- (1) 積分形式(微分形式に較べて安定)
- (2) 弱形式(weak solution、微分次数の低下)
- (3) 汎用性(非構造格子、境界適合性)
- (4) 基底関数(形状関数、各要素で独立)
- (5) 境界条件が入れ易い

図29 有限要素法の特長

(iii) 対流項の処理

NS方程式を解くときの最大の課題は非線項である対流項の処理方法である。対流項の処理方法は現在4つの方法がある(図30参照)。非保存形は高次風上差分法に適している。

保存形は運動量を保存し有限体積法分野で発達している。非対称形と回転形は運動エネルギーを保存する。GSMAC法は高Reynolds数に安定な回転形を採用している。

1. 対流形(非保存形)

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

2. 保存形(運動量保存)

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v})$$

3. 非対称形(運動エネルギー保存)

$$\frac{1}{2} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v})]$$

4. 回転形(運動エネルギー保存)

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

図30 対流項の処理方法

(iv) GSMAC法の基本アルゴリズム

GSMAC法の基本アルゴリズムを図31に示す。まず回転形のNavier-Stokes方程式をEuler前進法で解いて速度の予測値を求める。つぎに修正ポテンシャルのPoisson方程式を擬似時間緩和法または直接法を用いて解く。このとき、 $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ になるまで、速度とエネルギーの同時緩和を行う。エネルギー方程式や誘導方程式が付加された場合には、まず速度場を求めてから、つぎに温度場や電磁場を計算する。

◎ 回転形表示

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla H - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \\ \tilde{\mathbf{v}} \text{ predictor} \end{cases}$$

◎ 速度・エネルギーの同時緩和法

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}} - \nabla \phi & \text{corrector} \\ H^{n+1} = H^n + \phi / \Delta t \end{cases}$$

ここで修正ポテンシャルのPoisson方程式

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$$

を擬似時間緩和法または直接法で解く。

図31 GSMAC法の基本アルゴリズム

例題5 非構造格子における優対角化近似

$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ なる Poisson 方程式は差分法で優対角化近似を用いて解かれる。非構造格子を用いる GSMAC 有限要素法において、Laplace の逆演算子は

$$\phi = -\lambda^{-1} \tilde{\mathbf{D}}$$

と近似できることを示しなさい。ただし、

$$\lambda = \frac{1}{V_e} \iint_{S_e} \frac{1}{\Delta n} dS$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{V_e} \iint_{S_e} \tilde{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

である。(解答は8章末に掲載)

7・3 GSMAC法による電磁流体の解析

(i) Navier-Stokes方程式

ここでは速度ベクトルを $\mathbf{u}$ で表す。回転形Navier-Stokes方程式の解法にはGSMAC有限要素法のアルゴリズムを用いる。すなわち、時間に関して前進Euler法で

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla H^n + \mathbf{u}^n \times \boldsymbol{\omega}^n$$

$$- \frac{1}{Re} \nabla \times \boldsymbol{\omega}^n + \frac{Ha^2}{Re} \mathbf{j}^n \times \mathbf{B}^n$$

と離散化し、まず速度の予測値 $\tilde{\mathbf{u}}$ を求める。次に修正速度ポテンシャル φ を導入して、速度とBernoulli関数を同時緩和法で $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ を満足させながら解く。

すなわち、反復子 $k=0$ に対して、 $\mathbf{u}^0 = \tilde{\mathbf{u}}$ 、 $H^0 = H^n$ として、次の反復法

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \nabla \varphi^k$$

$$H^{k+1} = H^k + \varphi^k / \Delta t$$

$$\nabla^2 \varphi^k = \nabla \cdot \mathbf{u}^k \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0)$$

を繰り返す。このとき、 φ^k に関するPoisson方程式は擬似時間緩和法または直接法により解かれる。反復の結果、すべての要素で $|\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1}| \leq \varepsilon_u$ (例えば $\varepsilon_u = 0.001$)を満足したとき、 $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{k+1}$ 、 $H^{n+1} = H^{k+1}$ として次の時間ステップに進む。

(ii) 誘導方程式

磁場の誘導方程式にはスカラー・ポテンシャルのこう配項がないから、そのままではGSMAC法の解法が使用できない。そこで、ベクトル解析の公式

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

$$+ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B}$$

$$+ (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

を用いて、磁場の誘導方程式を

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla G + 2(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}$$

$$+ \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Rm} \nabla^2 \mathbf{B}$$

と変形する。ここでスカラー関数は $G = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}$ である。この方程

式は回転形のNavier-Stokes方程式と同様に、予測子・修正子法で解くことができる。すなわち、上式を時間に関して前進Euler法で

$$\frac{\tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{B}^n}{\Delta t} = -\nabla G^n + 2(\mathbf{B}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \mathbf{B}^n \times \boldsymbol{\omega}^n$$

$$+ \mathbf{u}^n \times (\nabla \times \mathbf{B}^n) + \frac{1}{Rm} \nabla^2 \mathbf{B}^n$$

と離散化し、まず磁場の予測値 $\tilde{\mathbf{B}}$ を求める。次に修正磁場ポテンシャル ψ を導入して、磁場とスカラー関数 G を同時緩和法で、 $\nabla \cdot \mathbf{B}^{l+1} = 0$ を満足させながら解く。すなわち、反復子 $l=0$ に対して、 $\mathbf{B}^0 = \tilde{\mathbf{B}}$ 、 $G^0 = G^n$ として、次の反復法

$$\mathbf{B}^{l+1} = \mathbf{B}^l - \nabla \psi^l$$

$$G^{l+1} = G^l + \psi^l / \Delta t$$

$$\nabla^2 \psi^l = \nabla \cdot \mathbf{B}^l \quad (\nabla \cdot \mathbf{B}^{l+1} = 0)$$

を繰り返す。このとき、 ψ^l に関するPoisson方程式は擬似時間緩和法または直接法により解かれる。反復の結果、すべての要素で $|\nabla \cdot \mathbf{B}^{l+1}| \leq \varepsilon_B$ (例えば $\varepsilon_B = 0.001$)を満足したとき $\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^{l+1}$ 、 $G^{n+1} = G^{l+1}$ として次の時間ステップに進む。すなわち、この解法により従来困難とされていた磁場のソレノイダル性が保証される。時刻1ステップについての解法の手順を図32に示す。

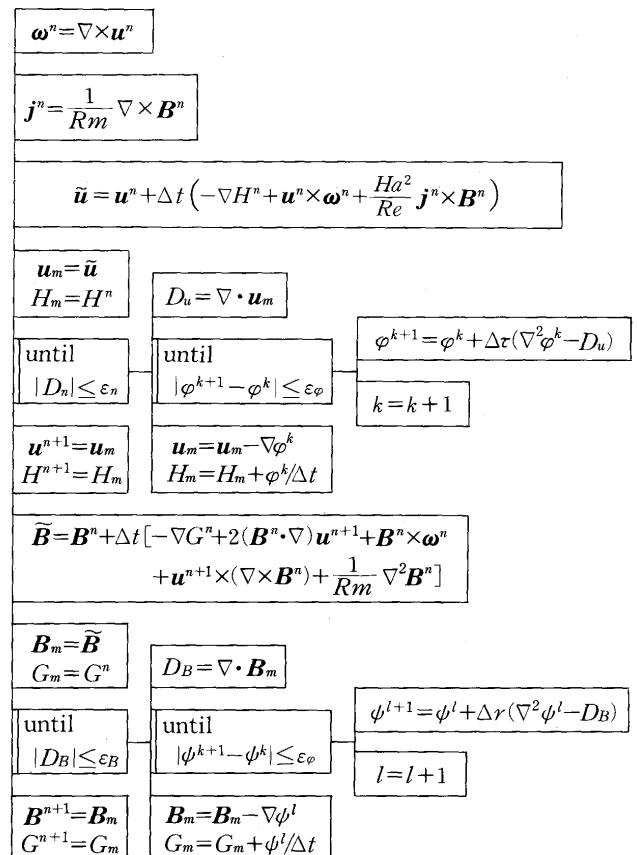


図32 運動方程式と誘導方程式の解法手順

(iii) 電位に関するPoisson方程式

特に定常場では電位を V として電界がそのよう配より

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

と表せる。Ohmの法則の発散をとることにより、電位に関するPoisson方程式

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

が導ける。このとき、付加条件 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ が課せられている。

この場合もPoisson方程式を解くことを目的とせず、物理的に重要な発散が零となるソレノイダル性を満足する電流場を求めることに重点を置く。その結果Poisson方程式を解くためのCPUタイムが大幅に節約される。それには、まず最初に電位に関するPoisson方程式を擬似時間緩和法または直接法で近似的に解いて電位の予測子 $\tilde{V}$ を求める。次にOhmの法則

$$\tilde{\mathbf{j}} = -\nabla \tilde{V} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}^n$$

により電流の予測子を求める。この予測子は当然 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を満足しない。そこで、修正電位ポテンシャル x を導入して、修正子を次の反復法により求める。すなわち、反復子 $m = 0$ に対して $\mathbf{j}^0 = \tilde{\mathbf{j}}$, $V^0 = \tilde{V}$ として、反復

$$\mathbf{j}^{m+1} = \mathbf{j}^m - \nabla x^m$$

$$V^{m+1} = V^m + x^m$$

$$\nabla^2 x^m = \nabla \cdot \mathbf{j}^m \quad (\nabla \cdot \mathbf{j}^{m+1} = 0)$$

を繰り返す。反復の結果、すべての要素で $|\nabla \cdot \mathbf{j}^{m+1}| \leq \epsilon_j$ (例えば $\epsilon_j = 0.001$) を満足したとき、 $\mathbf{j}^n = \mathbf{j}^{m+1}$, $V^n = V^{m+1}$ として反復を終了する。この結果ソレノイダル性を満足する電流場が求められる。流れが非定常のとき、電流の予測子の中の $\mathbf{u}^n$ を $\mathbf{u}^{n+1}$, $\mathbf{B}^n$ を $\mathbf{B}^{n+1}$ とすれば反復の結果 $\mathbf{j}^{n+1}$ と V^{n+1} が得られる。解法の手順を図33に示す。以上 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を満たすソレノイダル場はすべて同時緩和法で同じGSMAC法のアルゴリズムを用いて解くことができる。

7・4 GSMAC法による電磁熱流体の解析

電磁熱流体の解析も基本的には同じ解析手法を用いることができる。

(i) 運動方程式

回転形の運動方程式を前進Euler法を用いて

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla H^n + \mathbf{u}^n \times \boldsymbol{\omega}^n - \frac{1}{Re} \nabla \times \boldsymbol{\omega}^n + \frac{Gr}{Re^2} T^n \mathbf{g} + \frac{Ha^2}{Re} \mathbf{j}^n \times \mathbf{B}^n$$

と離散化する。速度とエネルギーの同時緩和法は前に述べた通りである。速度場を求めた後にエネルギー方程式を解く。

(ii) エネルギー方程式

エネルギー方程式は

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla T^n = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T^n + \frac{Ec}{Re} \Phi_v^n + \frac{Ha^2 Ec}{Re} \Phi_{em}^n$$

と離散化される。特に高Peclet数の問題では2段階法またはHybridスキームが用いられる (図34参照)。

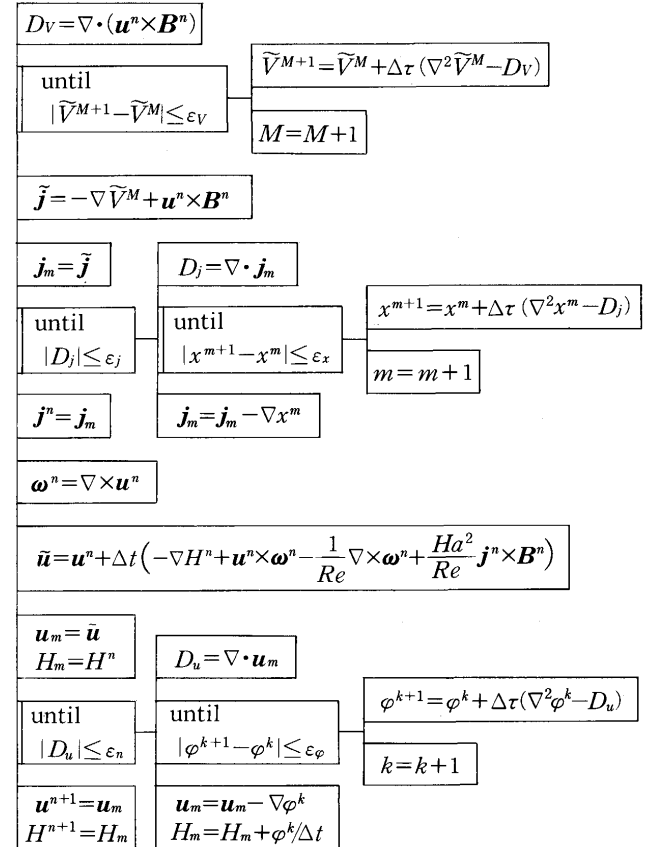


図33 運動方程式と電場のPoisson方程式の解法手順

[1] 2段階法

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = 0 \quad \text{3rd-Order-上流化法}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \Phi_v \quad \text{陰的 Beam-Warming法}$$

[2] Hybrid スキーム

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T + \Phi_v$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad \text{厳密解}$$

図34 高Peclet数に対するエネルギー方程式の解法

(iii) 誘導方程式

誘導方程式の離散化は前述の通りである。以上の計算手順の流れ図で示すと図35となる。

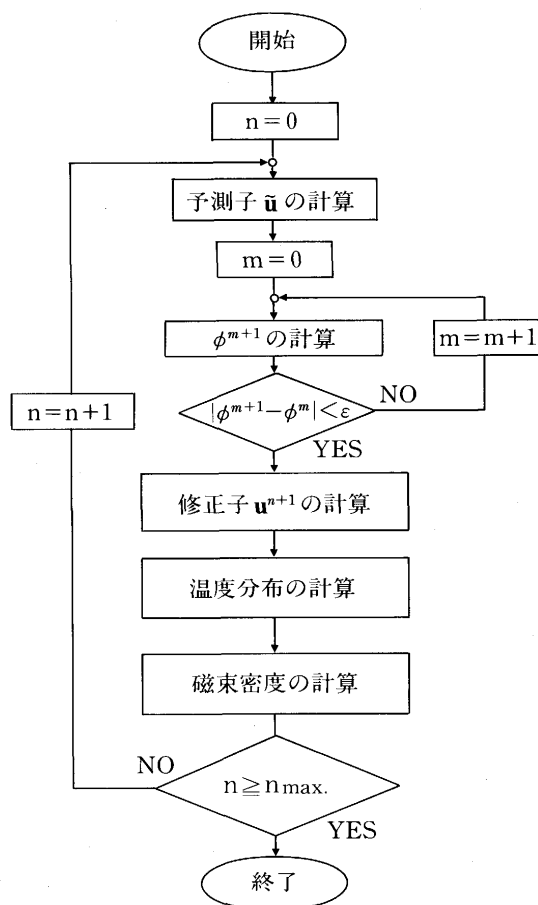


図35 計算の流れ図

7・5 空間の離散化と係数行列

(i) 変数配置

Navier-Stokes方程式と誘導方程式の離散化はGalerkin法の定式化に従う有限要素法を用いて行う。その他の方程式は有限体積法を用いて離散化する。この理由は、計算効率の向上と特にPoisson方程式の解法においては高精度の流束計算が可能であるからである。2次元の場合用いる要素は四角形でその変数配置図は図36の通りである。すなわち、速度 $\mathbf{u}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は節点に配置され、双一次による補間が行われる。そして、Bernoulli関数 H とすず度 ω 、スカラー関数 G と電流 $\mathbf{j}$ 、電位 V と電界 $\mathbf{E}$ は重心に配置され要素内で一定である。

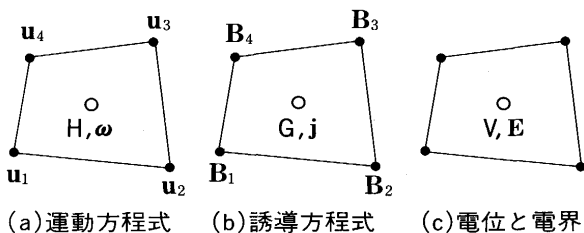


図36 GSMAC有限要素法の変数配置

(ii) 係数行列の陽的表示

有限要素法の欠点は計算時間がかかることと、大容量のメモリーが必要なことである。これを克服するには係数行列の計算をGaussの数値積分公式を用いて行うのでは解決しない。高速化の手法として、1点積分法があるが、これを行うと数値的不安定が生じ場合によっては発散する。ここでは、1点積分法と同程度の高速化を行い、かつ高精度に係数行列を求める手法を示す。

(a) 質量行列

質量行列は一般に

$$M_{ab} = \iiint_{V_e} N_a N_b dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_a N_b |J| d\xi d\eta d\zeta$$

で与えられる。ここでJacobianの行列式のみを一点求積法で積分すれば

$$M_{ab} = |J_0| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_a N_b d\xi d\eta d\zeta$$

となる。残りの積分は解析的に求められる。つぎにこの積分表示式を求める。図37に写像関係と節点番号の対応関係を、また表43に3次元の形状関数 N_a を示す。

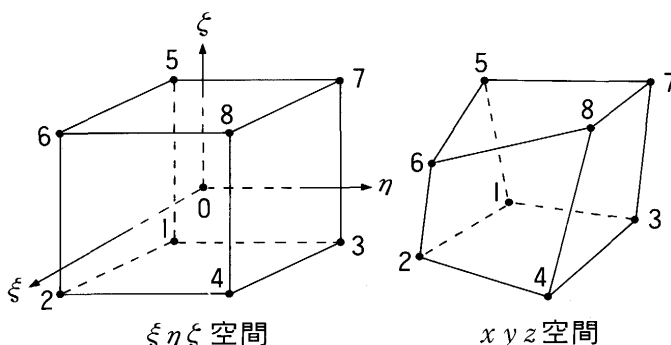


図37 写像関係と節点番号の対応

表43 3次元の形状関数

$$N_a = \frac{1}{8} (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta) (1 + \zeta_a \zeta)$$

a	ξ_a	ζ_a	η_a
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	-1	1	-1
4	1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	-1	1	1
8	1	1	1

ここで3次元の場合 $|J_0| = V_e/8$ であるから、質量行列の積分表示式はテンソル積表示で

$$M_{ab} = \frac{V_e}{64} (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) (1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b) (1 + \frac{1}{3} \zeta_a \zeta_b) = V_e M_x \otimes M_y \otimes M_z$$

ただし

$$M_x = \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b), M_y = \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b), M_z = \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{3} \zeta_a \zeta_b)$$

と表せる。

(b) こう配ベクトル

微分関係式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad dxdydz = |J| d\xi d\eta d\zeta$$

を利用する。ここでJacobianとJacobianの逆行列は

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

である。ここで成分 A_{ij} は表44の通りである。

表44 成分 A_{ij}

$A_{11} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$	$A_{12} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{vmatrix}$	$A_{13} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix}$	(y, z)
$A_{21} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$	$A_{22} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{vmatrix}$	$A_{23} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{vmatrix}$	(z, x)
$A_{31} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$	$A_{32} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{vmatrix}$	$A_{33} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$	(x, y)
$\begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$	

以上の結果より微分関係式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} dxdydz = \begin{bmatrix} A_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} + A_{13} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ A_{21} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{22} \frac{\partial}{\partial \eta} + A_{23} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ A_{31} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{32} \frac{\partial}{\partial \eta} + A_{33} \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} d\xi d\eta d\zeta$$

を得る。両辺を積分することによりこう配ベクトルは

$$\begin{bmatrix} C_{a,x} \\ C_{a,y} \\ C_{a,z} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} A_{11} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial N_a}{\partial \eta} + A_{13} \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \\ A_{21} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} + A_{22} \frac{\partial N_a}{\partial \eta} + A_{23} \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \\ A_{31} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} + A_{32} \frac{\partial N_a}{\partial \eta} + A_{33} \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \end{bmatrix} d\xi d\eta d\zeta$$

と表せる。ここで、 x, y, z と形状関係は、

$$x = \sum_{a=1}^8 N_a x_a \quad y = \sum_{a=1}^8 N_a y_a \quad z = \sum_{a=1}^8 N_a z_a$$

$$N_a = \frac{1}{8} (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta) (1 + \zeta_a \zeta)$$

である。これらを代入して、積分を実行するとこう配ベクトルが求まる。積分結果、こう配ベクトルは、

$$\begin{bmatrix} C_{a,x} \\ C_{a,y} \\ C_{a,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{11})_0 & (A_{21})_0 & (A_{31})_0 \\ (A_{21})_0 & (A_{22})_0 & (A_{23})_0 \\ (A_{31})_0 & (A_{32})_0 & (A_{33})_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_a \\ \eta_a \\ \zeta_a \end{bmatrix}$$

と求まる。ここで

$$(A_{11})_0 = \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(\eta, \zeta)} \right|_0 = \frac{1}{64} \begin{vmatrix} \sum \eta_b y_b & \sum \eta_c z_c \\ \sum \zeta_b y_b & \sum \zeta_c z_c \end{vmatrix}$$

である。他の成分 $(A_{ij})_0$ も同様に計算できる。

特に図38に示された直交座標の場合は

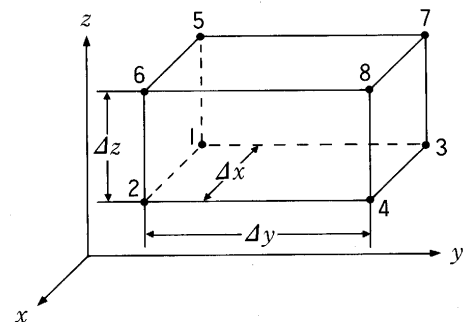


図38 直交座標と直方体

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\Delta y \Delta z}{4}, & A_{12} &= 0, & A_{13} &= 0 \\ A_{21} &= 0, & A_{22} &= \frac{\Delta z \Delta x}{4}, & A_{23} &= 0 \\ A_{31} &= 0, & A_{32} &= 0, & A_{33} &= \frac{\Delta x \Delta y}{4} \end{aligned}$$

となる。よって非対角成分は直交性からのずれを表すことになる。直交する場合こう配ベクトルの成分は、

$$C_{a,x} = \frac{\Delta y \Delta z}{4} \xi_a, \quad C_{a,y} = \frac{\Delta z \Delta x}{4} \eta_a, \quad C_{a,z} = \frac{\Delta x \Delta y}{4} \zeta_a$$

と表せる。ここで ξ_a 、 η_a 、 ζ_a は表43の通りである。

(c) 移流ベクトル

移流項をGalerkin法で離散化する。このとき速度ベクトルを要素の中心で評価する。このことはメモリの節約と安定化に対して重要なことである。例えば温度の移流項は

$$\iiint_{V_e} (\mathbf{v}_e \cdot \nabla T) N_b dX dY dZ = T_a \mathbf{v}_e \cdot \iiint_{V_e} (N_b \nabla N_a dX dY dZ)$$

となる。ここで移流ベクトルは

$$\begin{aligned} B_a &= \iiint_{V_e} N_b \nabla N_a dX dY dZ = \iiint_{V_e} (N_b)_0 \nabla N_a dX dY dZ \\ &= (N_b)_0 C_a = \frac{1}{8} C_a \end{aligned}$$

と評価される。すなわち N_b を1点分積分法で評価すると、移流ベクトルはこう配ベクトルを用いて表すことができる。ここで、

$$C_a = (C_{a,x}, C_{a,y}, C_{a,z})$$

である。

(d) 拡散行列

3次元の拡散行列は

$$L_{ab} = \iiint_{V_e} \left(\frac{\partial N_a}{\partial x} \frac{\partial N_b}{\partial x} + \frac{\partial N_a}{\partial y} \frac{\partial N_b}{\partial y} + \frac{\partial N_a}{\partial z} \frac{\partial N_b}{\partial z} \right) dxdydz$$

である。右辺の各項をそれぞれ分離し

$$L_{ab} = L_{ab,xx} + L_{ab,yy} + L_{ab,zz}$$

と書く。ここで

$$\begin{aligned} L_{ab,xx} &= \iiint_{V_e} \frac{\partial N_a}{\partial x} \frac{\partial N_b}{\partial x} dxdydz \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{J} \left(A_{11} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial N_a}{\partial \eta} + A_{13} \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \right) \cdot \\ &\quad \left(A_{11} \frac{\partial N_b}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial N_b}{\partial \eta} + A_{13} \frac{\partial N_b}{\partial \zeta} \right) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{8}{V_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ (A_{11})_0 \frac{\partial N_a}{\partial \xi} + (A_{12})_0 \frac{\partial N_a}{\partial \eta} + (A_{13})_0 \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \right\} \\ &\quad \left\{ (A_{11})_0 \frac{\partial N_b}{\partial \xi} + (A_{12})_0 \frac{\partial N_b}{\partial \eta} + (A_{13})_0 \frac{\partial N_b}{\partial \zeta} \right\} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned}$$

である。ここで添字は原点での評価値である。 $L_{ab,yy}$ と $L_{ab,zz}$ も同様にして得られる。その結果は

$$\begin{aligned} L_{ab,yy} &= \frac{8}{V_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ (A_{21})_0 \frac{\partial N_a}{\partial \xi} + (A_{22})_0 \frac{\partial N_a}{\partial \eta} + (A_{23})_0 \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \right\} \\ &\quad \left\{ (A_{21})_0 \frac{\partial N_b}{\partial \xi} + (A_{22})_0 \frac{\partial N_b}{\partial \eta} + (A_{23})_0 \frac{\partial N_b}{\partial \zeta} \right\} d\xi d\eta d\zeta \\ L_{ab,zz} &= \frac{8}{V_e} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ (A_{31})_0 \frac{\partial N_a}{\partial \xi} + (A_{32})_0 \frac{\partial N_a}{\partial \eta} + (A_{33})_0 \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \right\} \\ &\quad \left\{ (A_{31})_0 \frac{\partial N_b}{\partial \xi} + (A_{32})_0 \frac{\partial N_b}{\partial \eta} + (A_{33})_0 \frac{\partial N_b}{\partial \zeta} \right\} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned}$$

である。

拡散行列を求める前にまずつぎの積分を実行する。その結果

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \frac{\partial N_b}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1}{8} \xi_a \xi_b \left(1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_a \zeta_b \right) \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \frac{\partial N_b}{\partial \eta} d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1}{8} \xi_a \eta_b \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_a \zeta_b \right) \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \frac{\partial N_b}{\partial \zeta} d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1}{8} \xi_a \zeta_b \left(1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b \right) \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \frac{\partial N_b}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1}{8} \eta_a \xi_b \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_a \zeta_b \right) \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \frac{\partial N_b}{\partial \eta} d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1}{8} \eta_a \eta_b \left(1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b \right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_a \zeta_b \right) \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \frac{\partial N_b}{\partial \zeta} d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1}{8} \eta_a \zeta_b \left(1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b \right) \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \frac{\partial N_b}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1}{8} \zeta_a \xi_b \left(1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b \right) \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \frac{\partial N_b}{\partial \eta} d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1}{8} \zeta_a \eta_b \left(1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b \right) \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_a}{\partial \zeta} \frac{\partial N_b}{\partial \zeta} d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1}{8} \zeta_a \zeta_b \left(1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b \right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b \right) \end{aligned} \right\}$$

を得る。よって拡散行列は、

$$L_{ab} = L_{ab,xx} + L_{ab,yy} + L_{ab,zz}$$

より求まる。すなわち

$$\begin{aligned}
L_{ab} = \frac{1}{V_e} [& (A_{11})_0(A_{11})_0 + (A_{21})_0(A_{21})_0 + (A_{31})_0(A_{31})_0 \{ \xi_a \xi_b (1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b) (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) \\
& + \{ (A_{11})_0(A_{12})_0 + (A_{21})_0(A_{22})_0 + (A_{31})_0(A_{32})_0 \} (\xi_a \eta_b + \eta_a \xi_b) (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) \\
& + \{ (A_{11})_0(A_{13})_0 + (A_{21})_0(A_{23})_0 + (A_{31})_0(A_{33})_0 \} (\xi_a \zeta_b + \zeta_a \xi_b) (1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b) \\
& + \{ (A_{12})_0(A_{12})_0 + (A_{22})_0(A_{22})_0 + (A_{32})_0(A_{32})_0 \} \eta_a \eta_b (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) \\
& + \{ (A_{12})_0(A_{13})_0 + (A_{22})_0(A_{23})_0 + (A_{32})_0(A_{33})_0 \} (\eta_a \zeta_b + \zeta_a \eta_b) (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) \\
& + \{ (A_{13})_0(A_{13})_0 + (A_{23})_0(A_{23})_0 + (A_{33})_0(A_{33})_0 \} \zeta_a \zeta_b (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) (1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b)]
\end{aligned}$$

と表せる。

直交座標：直交座標の場合、係数行列 $(A_{ij})_0$ は

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta y \Delta z}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta z \Delta x}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta x \Delta y}{4} \end{bmatrix}$$

である。要素の体積を $V_e = \Delta x \Delta y \Delta z$ として、拡散行列はテンソル積表示で

$$\begin{aligned}
L_{ab} &= \frac{V_e}{16} \left[\frac{1}{\Delta x^2} \xi_a \xi_b (1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b) (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) + \frac{1}{\Delta y^2} \eta_a \eta_b (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) \right. \\
& \quad \left. (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) + \frac{1}{\Delta z^2} \zeta_a \zeta_b (1 + \frac{1}{3} \xi_a \xi_b) (1 + \frac{1}{3} \eta_a \eta_b) \right] \\
\therefore L_{ab} &= V_e [M_y \otimes M_z \otimes L_{xx} + M_z \otimes M_x \otimes L_{yy} + M_x \otimes M_y \otimes L_{zz}]
\end{aligned}$$

となる。この表示式は拡散行列をSplittingするときに役立つ。

7・6 計算例

この節に関しては参考文献佐藤ほか2名(1990)、棚橋ほか2名(1991)、沖・棚橋(1992)を参照のこと。

(i) 平行平板間の過渡流れ

スキームの検証をするため、まず3つの出発流れ(starting flow)について調べる。すなわち

(a) 電場および磁場が印加されていない場合を考える。最初流れは静止していて、突然一定の圧力こう配を与えると、平行平板間の流体は運動を開始し、最終的にPoiseuille流れとなる。

(b) (a)で得られた十分発達したPoiseuille流れに、突然一様磁場を印加する。流れは徐々に減速され最終的にHartmann流れとなる。

(c) (a)で得られた定常なPoiseuille流れに、突然一様な電場と磁場を印加する。最終的には定常流れとなる。の場合である。(a)の出発流れに対しては厳密解が存在する。 $R_e=10$ に対する厳密解と数値解析結果を比較して、図39と図40に示す。図39は中心軸上速度の発達過程であり、図40

は断面の速度分布の発達過程である。両者の結果は全く一致する。これは本解析手法が非定常流れに有効であることを示している。

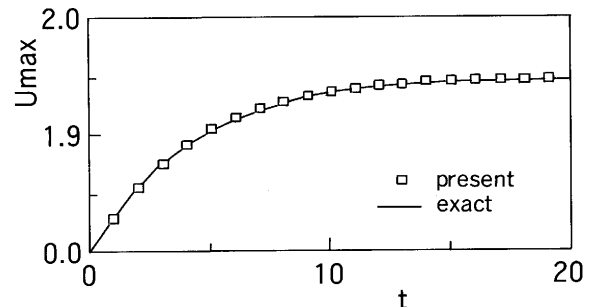


図39 中心軸上速度の時間変化（電磁場なし）

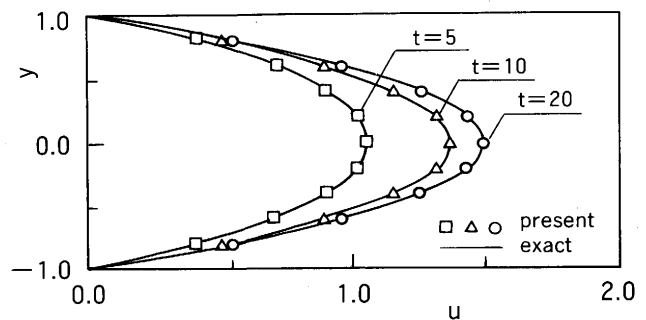


図40 速度分布の時間変化（電磁場なし）

(b)の出発流れ（一様磁場下の流れ）を誘導方程式の検証として用いる。十分発達したPoiseuille流れに突然一様磁場を印加する。流れは減速され最終的な定常流れはHartmann流れとなる。計算例のパラメータとして、 $R_e=10$ 、 $H_a=5$ 、 $R_m=1$ を選ぶ。図41に中心軸上速度の時間特性を示す。Jayaramanら(1985)の解析によると中心軸上速度が定常の厳密解の101%になる無次元時刻は7.75であり、本数値解析では7.76であった。図42と図43に速度分布と誘起磁場分布の過渡特性を示す。初期において流れが大きく減衰し、その後しだいにHartmann流れに向かう。壁面近傍では初期に加速され、後に減速されるという現象が現れる。これは初期に中心速度が大きく減速されるため、質量保存則により壁面方向に流体が押しやられるためである。一方誘起磁場分布は常に奇関数分布を保ちながら、定常状態に漸近する。誘起磁場の最大値と最小値を与える点は、定常に近づくにしたがって壁面に近づいていく。定常状態での速度分布と誘起磁場分布の厳密解と時刻 $t=8.0$ での数値解を比較する。その結果、速度と誘起磁場の最大誤差は $y=0.93$ でそれぞれ1.76%と2.06%であった。この誤差の発生原因として壁面近傍でのメッシュの粗さが考えられるが、しかし誤差としては小さくあまり問題にはならない。

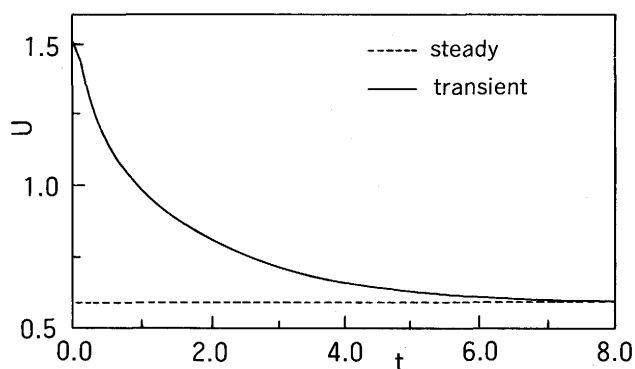


図41 中心軸上速度の時間変化 (印加磁場のみ)

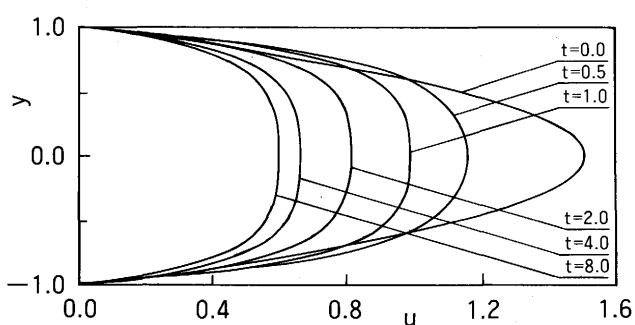


図42 速度分布の時間変化 (印加磁場のみ)

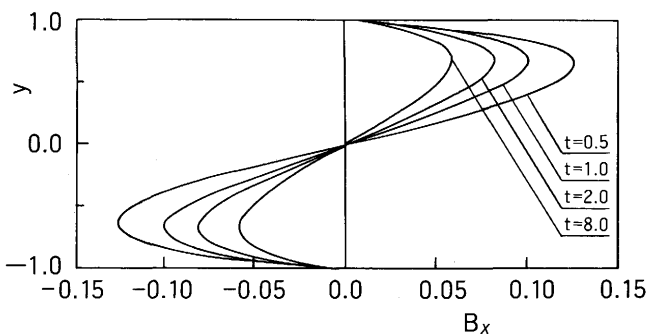


図43 誘起磁場分布の時間変化 (印加磁場のみ)

一例として、 $R_e=10$ 、 $H_a=20$ 、 $R_m=1$ の速度分布の過渡特性を図44に示しておく。印加磁場を大きくすると、速度分布が急速に変化し、時刻 $t=3.0$ ではほぼ定常となる。また、過渡状態において速度分布がM字形となり、定常状態においては中央部分がより平坦な速度分布となる。

(c)の出発流れ (一様磁場と一様電場下の流れ) の特徴は、一様電場が印加され流体中に電流が流れている点である。したがって流体に働く Lorentz 力は、(b)の場合よりも一段と大きい。これは瞬時にして定常流れになることを意味している。ここでは定常解の一例 ($R_e=10$ 、 $H_a=10$ 、 $R_m=1$ 、 $\gamma=1.47$) を図45と図46に示しておく。図45の定常解にいた

るまでの時間は、無次元時間で約0.5である。厳密解との最大誤差は非常に小さく0.51%であった。図46には定常状態での速度ベクトル、磁場ベクトル、等うず度線および等圧力線が示されている。速度分布は中央部が平らで、壁面近傍で大きなせん断力が働く。その結果は等うず度線図からも明らかである。

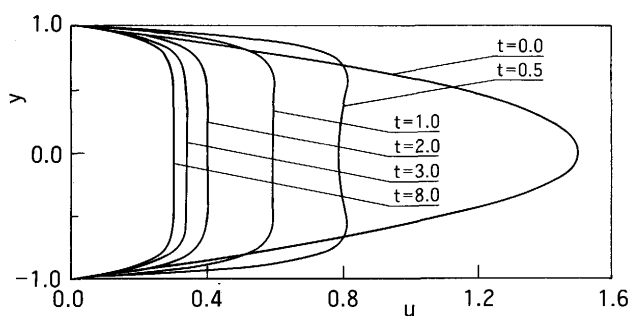


図44 速度分布の時間変化 (印加磁場あり $H_a=20$)

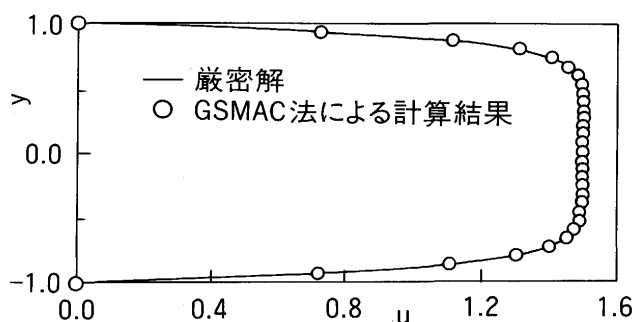
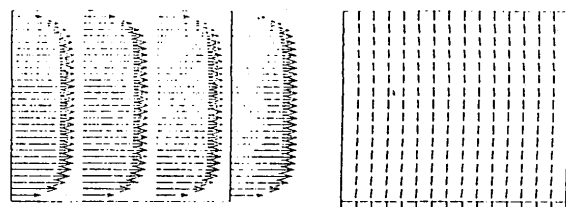
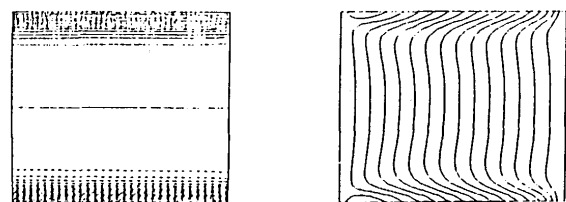


図45 速度分布図 (印加電場・印加磁場あり)



(a)速度ベクトル

(b)磁場ベクトル

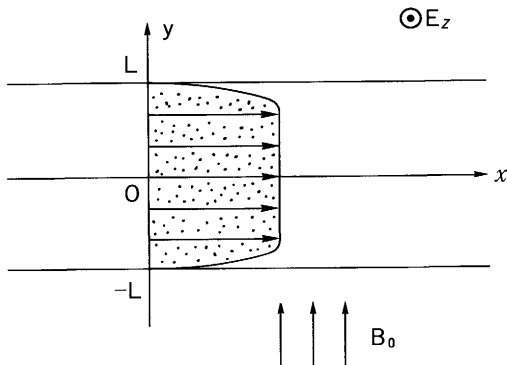


(c)等うず度線($\Delta\omega=0.5$) (d)等圧力線($\Delta p=0.02$)

図46 定常状態 (印加電場・印加磁場あり)

例題6 Hartmann流れ

平行平板間の導電性流体に、壁面に垂直な磁場をかけると、流れはHartmann流れとなる（付図3）。



付図3 Hartmann流れ

Hartmann流れの速度分布は

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{1 - \frac{\cosh(H_a y/L)}{\cosh H_a}}{1 - \frac{\tanh H_a}{H_a}}$$

となることを示しなさい。ここで $\bar{u}$ は平均流速、 $H_a = B_0 L (\sigma/\eta)^{1/2}$ はHartmann数、 $2L$ は平行平板の間隔である。（解答は8章末に掲載）

(ii) 電極間まわりの流れ

図47に示されたような平行平板間の2次元非圧縮導電性流体の流れを考える。平行平板の間隔は $2L$ であり、その途中に長さ L の電極がある。その電解の強さは流れに垂直で $\mathbf{E}_0 = (0, E_0, 0)$ である。流速ベクトルと電解ベクトルに直交するように磁場 $\mathbf{B}_0 = (0, 0, -B_0)$ が紙面に垂直にかけられている。電極間に電流が流れるとLorentz力が流体に作用し、その力によって内部の流体は駆動される。電流が流れるとJoule熱が発生する。その結果流体に浮力が作用するが、この力は小さく無視できるものとする。

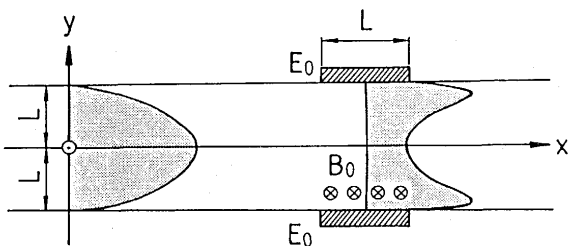


図47 平行平板間に設置された電極間の流れ

(a) メッシュ図

計算に用いたメッシュ図の一部と磁束密度の分布を図48に示す。平行平板間の距離は電極の長さの2倍であり、主流側と下流側の長さはそれぞれ電極の長さの10倍である。図48では見せやすいように縦横比の縮尺が考えてある。メッシュは壁面近傍に寄せられた不等分割メッシュで、要素数は $40 \times 48 = 1920$ 、総節点数は2009である。磁束密度の分布は電極間で一様で、その強さは $B_0 (=1)$ である。電極の外部領域では、磁束密度の強さは指数関数的に減衰する。

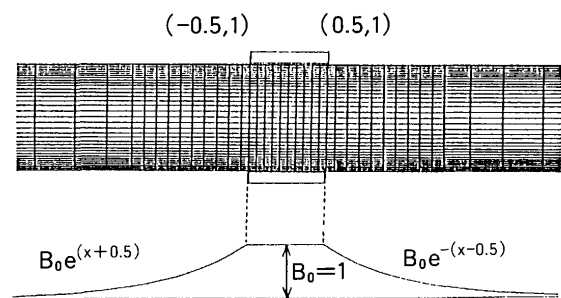


図48 メッシュ図

(b) 境界条件

電極間の電位差は3で、固体壁面上は絶縁されて $\partial V / \partial n = 0$ である。流体の出入口では、内部の電位こう配が外挿されている。流体は壁面上で $u = 0$ のno-slip条件で、入口は $u = (3/2)(1 - y^2)$ の放物形速度分布である。ただし、速度は入口の代表速度 U_0 で無次元化されている。圧力の基準値は出口側にとられ $p = 0$ である。

(c) 解析結果

数値解析の結果を図49に示す。上から順に速度ベクトル、流線、等うず度線、等圧力線、等電位線、電流分布が示されている。流れはLorentz力により中央部で減速され、電極方向に引き込まれる。その結果MHD特有のM字形の速度分布が形成される。等うず度線は断面の上半分が示されている。壁面近傍に強いせん断層があることがわかる。等圧力線は電極を中心にほぼ左右対称であり、等電位線は x 軸に関して上下対称となる。電流は電極の端から多く流出・流入している。下部の電極から流出した電流は流体中に広がり、再び上部の電極へ流れ込む。そして流体の流れによって電流分布は大きく乱されない。これは流速分布がLorentz力によって大きく変化するのに比べて対照的である。

(d) 比較検討

Ramos-Winowich (1985) は同じ問題を差分法で解いている。図50に本解析結果との比較を示す。 $x = -0.5$ 、 $x = 0$ 、 $x = 0.5$ の中央部断面の速度分布は比較的よく一致しているが、電極の前方および後方で少し差がある。これは電極の長さの10倍では、まだ電極による流れの影響が出入口で残っているためであると考えられる。

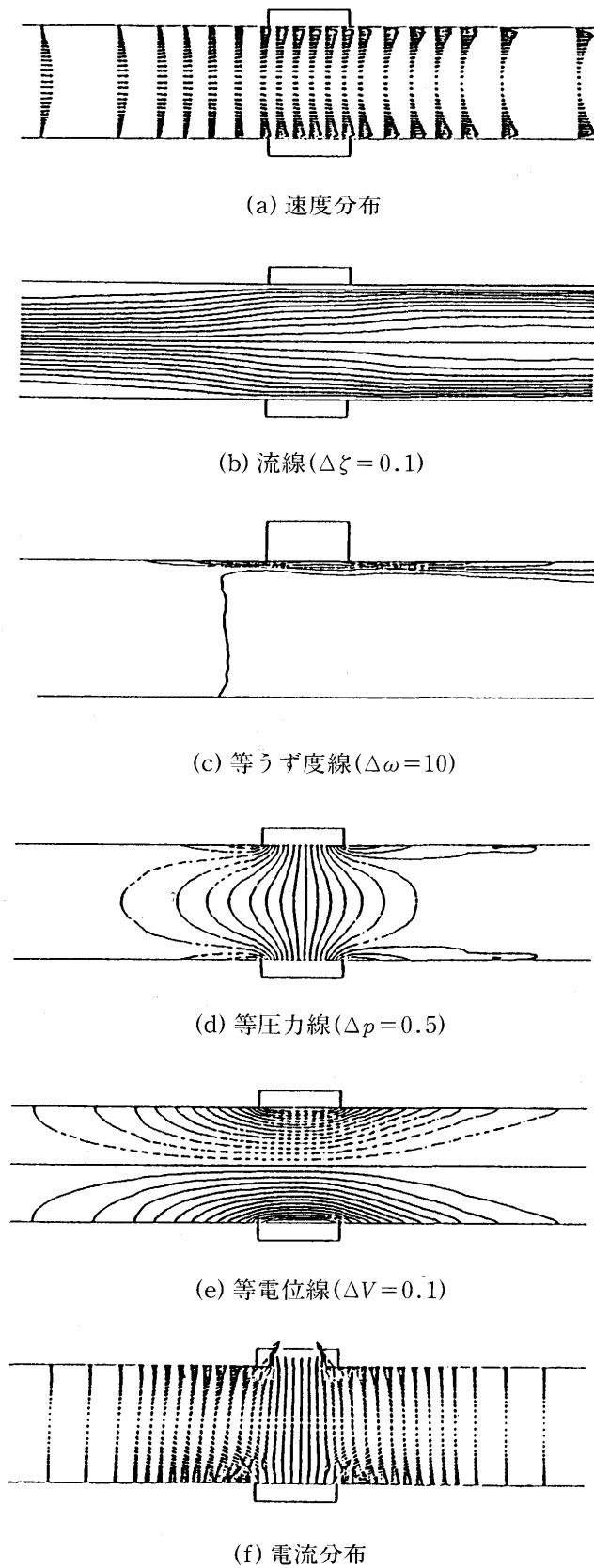


図49 電極間近傍の流れ ($Re=1000$, $Ha=100$)

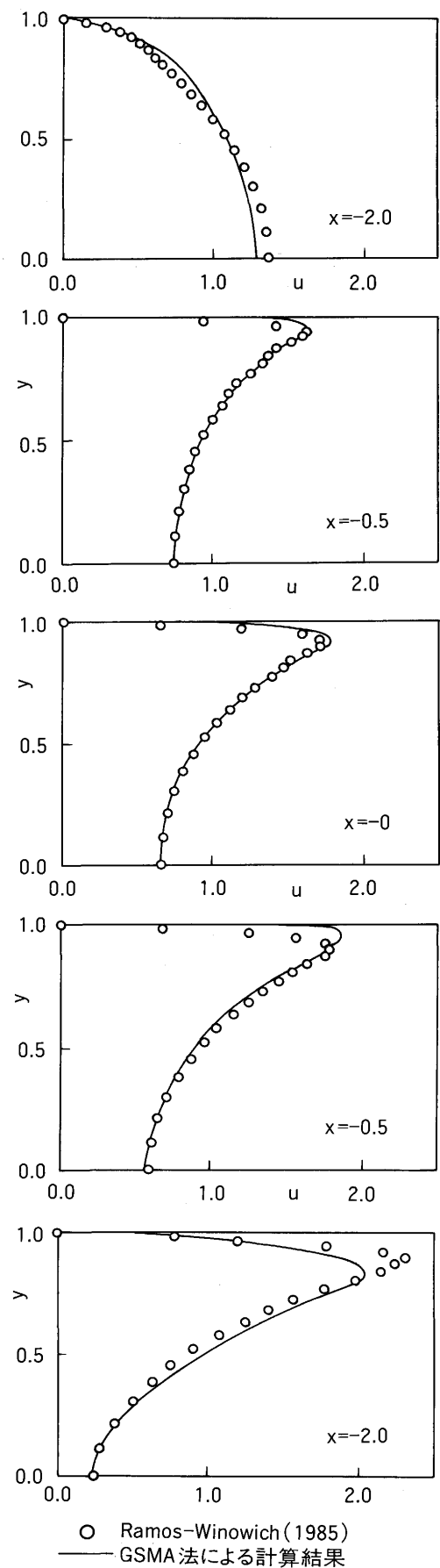


図50 速度分布の比較 ($Re=1000$, $Ha=100$)

(iii) 電磁流体の自然対流

(a) 実験結果

実験装置および方法：実験装置の概略図を図51に示す。作動流体の電磁流体としては、冷却機などの周辺装置を必要とすることのない常温で液体として存在する水銀を選んだ。装置は、水銀で満たされた一辺20mmの立方体容器、容器の左右壁を一定温度に保つための恒温水槽、温度制御を行うコントロールユニットおよび電磁石から構成されている。電磁石は直径120mmの磁極を有し磁極間隔は45mmで、最高0.85Tまでの磁場を印加することが可能である。容器壁面のうち恒温水槽に接する壁面は厚さ0.3mmの銅板で、残りの壁面は厚さ8mmの亚克力板で製作した。さらに銅板には、水銀との化学反応によりアマルガムを発生する恐れがあるため、表面をポリイミド製のフィルムで覆った。また壁面に沿う水銀の温度分布を可視化するために、容器正面壁内側に感温液晶シートを張り付けた。実験方法の手順を以下に述べる。

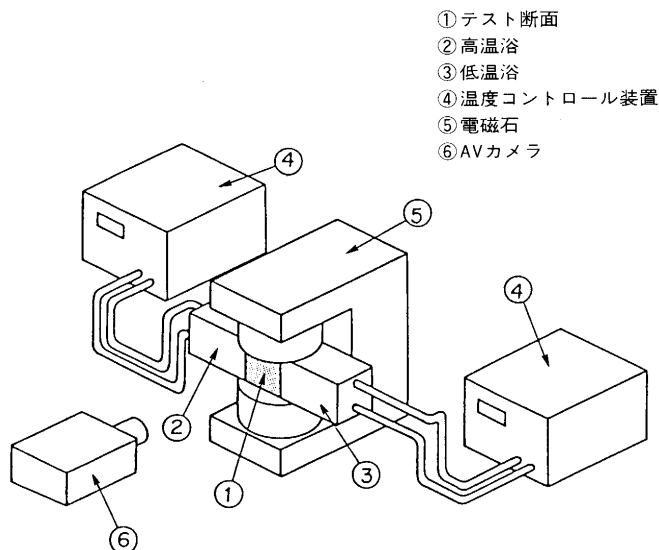


図51 実験装置の概略図

(1)電磁石により重力方向に磁場を印加する。(2)二つの恒温水槽の水温を15℃に保つ。(3)容器内の水銀の温度が15℃になったとき、高温側の水槽の水温を25℃に上昇させ、左壁を25℃に保たせる。(4)液晶シートにより色分けされた温度分布の時間経緯を定常状態に達するまで観察する。なお、結果はビデオカメラに撮影し、モニタ画面を写真撮影した。

実験結果および考察：温度分布の可視化試験結果を写真1に示す。縦方向に時間経緯を、横方向に磁場強度の強さを示す。時間の経過とともに高温壁により暖められた流体が低温側に移動し、最終的には点対称分布を示している。三つの場合とも、定常状態までに約10minを要した。磁場強

度の増加に伴い対流が抑えられている様子が、温度分布の傾きが大きくなることから判断される。これは、磁場の強さとともに流体との干渉により生ずる電磁力が増加し、それが対流を抑える方向に働くため、伝導による熱移動が対流によるそれよりも支配的になるからである。

	0GAUSS	2500GAUSS	7500GAUSS
2min	HOT COLD	HOT COLD	HOT COLD
3min	HOT COLD	HOT COLD	HOT COLD
4min	HOT COLD	HOT COLD	HOT COLD
5min	HOT COLD	HOT COLD	HOT COLD
10min	HOT COLD	HOT COLD	HOT COLD

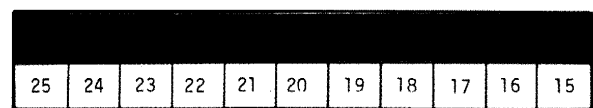


写真1 温度分布の可視化試験結果

(b) 数値計算結果

磁場なしの場合：まず、印加磁場のない場合において本計算法の計算精度を定量的に評価するために、Wolffら(1988)による低プラントル数流体の計測データと比較した。計測データは立方体キャビティ内の中央断面における温度分布であり、作動流体はガリウム($Pr=0.0208$)である。計算に用いた境界条件を図52に示す。速度はすべての壁面で $u_i=0$ とし、温度は左壁面を $T=1$ 、右壁面を $T=0$ で与え、残りの壁面は断熱とした。図53に定常状態における結果を示す。全体的に良く一致しており、磁場なしの場合における本計算法の妥当性を示唆しているものと思われる。

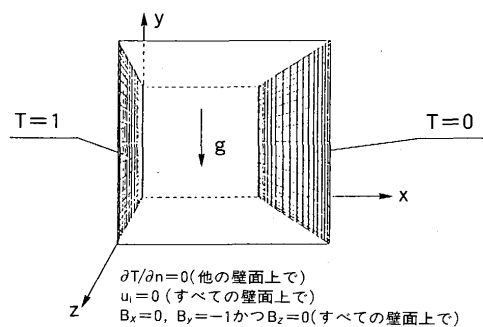


図52 境界条件

本計算結果	Wolffら (1988)		y
	実験結果	計算結果	
■	□	-----	0.867
▲	△		0.500
●	○	———	0.133

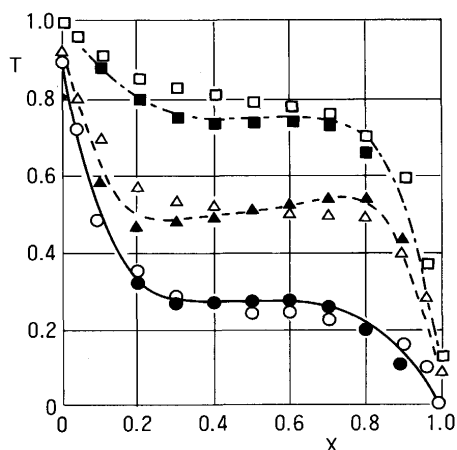


図53 計測データとの比較

境界条件および計算条件：磁束密度の境界条件は、実験において供試体の一辺が20mmであるのに対し、電磁石の磁極が120mmであり壁面では充分に一様であると考えられるため、 $B_i = (0, -1, 0)$ とした。 Re 数および Gr 数は、実験では完全に断熱という仮定が困難でありアクリル板を通して若干量の熱の出入りが観察されたことから、磁場なしの場合の計算結果と実験結果が大略一致するように決定した。そして、磁場を印加した場合はその Re 数から代表長さを逆算して Ha 数を決めることにした。一方、 Rm 数については本計算で誘導磁場を考慮できることを示すため、全体の解析結果にそれほど大きな影響を及ぼさない程度で若干大きめの値を設定した。計算で用いた無次元数を表45に示す。また、自然対流では代表速度が直接決定できないため、ここでは $U = g\beta\Delta TL/\nu$ として計算した。計算格子は二次元計算結果を参考に、総要素数8000とし、壁面近くに細かく配置した。

表45 計算で用いた無次元数

	Re	Pr	Gr	Ha	Rm
Case 1	6.97×10^6	0.0251	6.97×10^6	0.0	
Case 2	"	"	"	65.7	5.00×10^4
Case 3	"	"	"	197.1	"

温度分布：写真2に写真1に対応した温度分布の計算結果を示す。写真2は高温部より0.2間隔でピンク、赤、黄、緑、水色および青で色分けされた等温面を示している。実験結果と同様、初期の状態において左壁面が急に熱せられるため、その壁面付近の温度こう配が大きくなりその後、時間経過とともに対流作用により熱が移動していく。そして、定常状態になるに従い中央点(0.5, 0.5, 0.5)を中心に点対称分布に近づき、左壁面下部と右壁面上部の温度こう配が急になる。これは、この部分の熱伝達率が大いことを意味している。なお、定常状態は中央点での無次元温度が0.5に到達し、前時刻との最大温度差が 10^{-5} 以下に収まった時間と判断した。磁場ありの場合、磁場強度の増加に従い、温度こう配が小さくなるとともに等温面の傾きが急になっている。この温度こう配および分布形状は、可視化試験結果とも良く一致している。

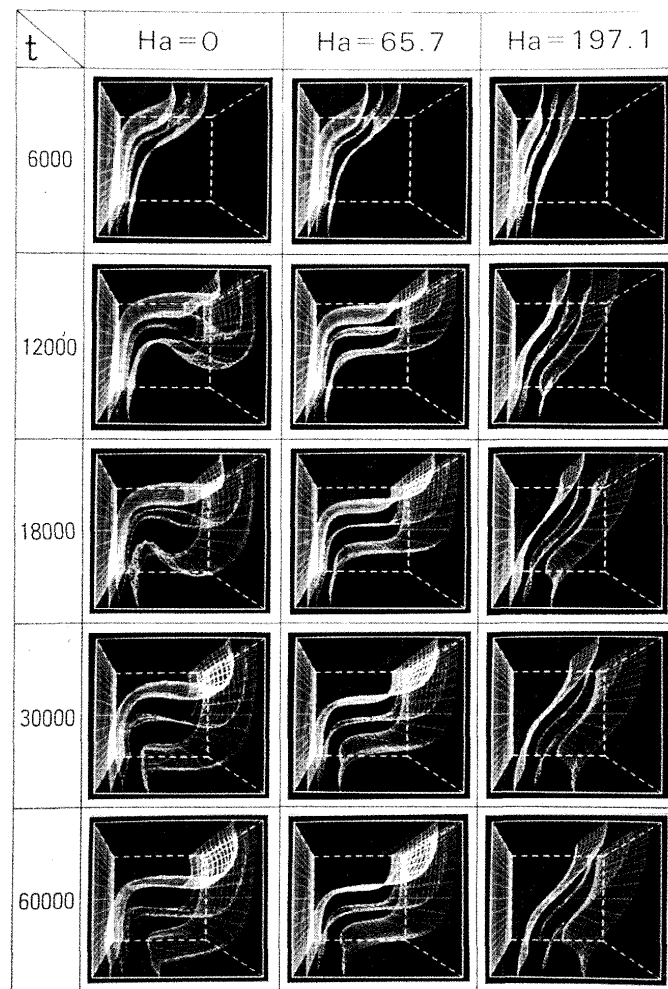


写真2 温度分布の計算結果

壁面平均 Nu 数：磁場による移動熱量の大きさを調べるために、各Caseで左右壁面における平均 Nu 数を計算した。その結果を図54に示す。各Caseとも、時間経過とともに熱が高温部から低温部に移動するため、高温壁面 Nu 数は減少し、逆に低温壁面 Nu 数は増加していく。そして最終的には定常状態になり一定値をとる。また磁場強度が増加すると、その一定値は1に近づいてくる。このことから、磁場の強さにともない対流が抑制され、主に熱は伝導により移動していくことがわかる。最後に定常状態における壁面平均 Nu 数をViskantaら（1986）および二次元計算結果と比較して表46に示す。磁場なしの場合、本計算結果はViskantaらの結果と極めて良く一致しており、三次元結果のほうが二次元結果より若干小さくなっている。磁場を印加すると、その傾向は逆になるが、これは三次元の影響により対流作用を助長させているためである。

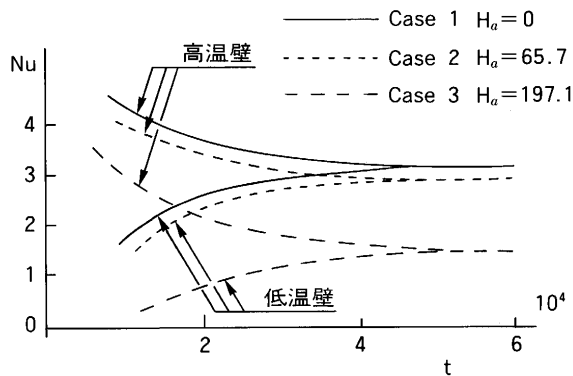


図54 左右壁面における平均 Nu 数

表46 定常状態における壁面平均 Nu 数

	Case 1	Case 2	Case 3
3-D	3.191 (3.136)*	2.945	1.467
2-D	3.275 (3.257)*	2.893	1.217

*Viskanta り (1986), $Gr = 5.0 \times 10^6$, $Pr = 0.02$

8 むすび

マイクロ・ポーラ電磁熱流体力学の基礎は9個の物理法則からなる一種の統一場の理論である。すなわち、質量・運動量・角運動量・エネルギーの4個の保存則と熱力学の第2法則とMaxwellの方程式を作り出すGaussの法則・Faradayの電磁誘導の法則・修正Ampereの法則・磁荷不在の法

則の4個である。これらの9個の法則よりマイクロ・ポーラ電磁熱流体力学の基礎方程式系が作り上げられた。この自然界のすべての連続体としての流体運動はこの9個の連立偏微分方程式系の解として求まる。マイクロ・ポーラ電磁熱流体力学はプラズマ・MHD・磁性流体・電気粘性流体の4本の柱よりなっている。MHDを取り扱うにはいろいろな仮定および近似が物理現象をそこなわない範囲でなされ、方程式系が単純化される。基礎方程式系は無次元化され、流れの現象は無次元数によって整理される。方程式系は非線形で理論解が求まるのは極めて単純な場合に限られる。したがって実際的な問題の解はすべてコンピュータによって数値的に求められる。差分法は計算スピードが速いが汎用性に乏しく、複雑な形状のものは容易に解けない。そこで発達してきたのが有限要素法である。ここで紹介したGSMAC有限要素法は記憶容量が少なく高速計算が可能な計算手法である。まだ、GSMAC法のアルゴリズムができて日も浅く、現在急速に発展している。またGSMAC法は非圧縮性の電磁熱流体用の計算手法の1つでもある。その一端の紹介が本講義の目的であった。読者にとって少しでもこの講義が役立てば幸いである。

例題5の解答

この解法はGSMAC有限要素法の核心である。Poisson方程式の両辺を要素 Ve について体積分すると

$$\iiint_{Ve} \nabla^2 \phi dV = \iiint_{Ve} \nabla \cdot \vec{v} dV$$

となる。Gaussの定理を用いて面積分に変換すれば、

$$\iint_{Se} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \iint_{Se} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

となる。ここで Se は要素 Ve の表面積である。いま着目している要素 Ve のポテンシャルが周囲よりも ϕ だけ増加したとすると

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{0 - \phi}{\Delta n}$$

なる近似が成立する。 ϕ は要素内一定で、 Δn は面の法線方向の線分の長さである。この近似を面積分の式に代入して、両辺を Ve で割れば

$$\phi = -\lambda^{-1} \tilde{D}$$

が導ける。 $\tilde{D}$ は単位体積あたりの発散量であり、 λ は差分法の優対角化近似において

$$\lambda = 2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)$$

となる。これは離散化されたLaplaceの演算子の優対角化近似を表している。

例題 6 の解答

流れは定常で層流であるとする。このとき運動方程式と Ohm の法則は

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - j_z B_0$$

$$j_z = \sigma (E_z + u B_0)$$

と書ける。この両式より電流 j_z を消去すると、速度 u に関する 2 階の微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\eta} u = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sigma}{\eta} E_z B_0$$

が導ける。 $\partial p / \partial x$ は一定であり、 E_z は y に無関係である。no-slip 条件 $u(\pm L) = 0$ で解けば解は

$$u = - \left[\frac{E_z}{B_0} + \frac{1}{\sigma B_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \left[1 - \frac{\cosh(H_a y / L)}{\cosh H_a} \right]$$

と求まる。平均流速は

$$\bar{u} = \frac{1}{2h} \int_{-L}^L u \, dy$$

で定義される。 u を代入すると平均流速は

$$\bar{u} = - \left[\frac{E_z}{B_0} + \frac{1}{\sigma B_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \left[1 - \frac{\tanh H_a}{H_a} \right]$$

と求まる。よって u を $\bar{u}$ で無次元化すると与式を得る。Hart-

mann 流れの速度分布は図 12(c) および図 44 の通りであり、磁場が強くなり Hartmann 数が大きくなると、中心部の速度分布は平になり、壁近傍に Hartmann 境界層が形成される。

参考文献

- 1) A.C.Eringen : Continuum physics IV, (1976), [Academic press]
- 2) L.Jayaraman and G.Ramanaiah : J.Comput. Phys., **60** (1985), p.478
- 3) 河合秀樹、澤田達男、棚橋隆彦 : 日本機械学会論文集B, **54**(1988-11), p.3118
- 4) L.O.Landau and E.M.Lifshiz : 電磁気学 1 および 2 (1976), [東京図書]
- 5) 沖良篤、棚橋隆彦 : 日本機械学会論文集B, **58** (1992-1), p.14
- 6) J.I.Ramos and N.S.Winowich : Phys. Fluids, **29** (1985), p.992
- 7) R.E.Rosensweig : Ferro hydro dynamics, (1985), p.116, [Cambridge univ.]
- 8) 佐藤敏浩、斉藤敦、棚橋隆彦 : 日本機械学会論文集B, **56**(1990), p.1571
- 9) J.A.Stratton : 電磁理論, (1941) [生産技術センター]
- 10) 棚橋隆彦、斉藤恒洋 : 京都大学数理解析研究所講究録, **548**(1985), p.122
- 11) T.Tanahashi, H.Okanaga and T.Saito : Int. J.Numer. Methods Fluids, **11** (1990), p.479
- 12) 棚橋隆彦、加藤保真、長谷川一郎 : 日本機械学会論文集B, **57**(1991-11), p.3680
- 13) 棚橋隆彦 : GSMAC-FEM, (1991), [アイビシー]
- 14) 棚橋隆彦 : 連続体の力学(2), 第 1 章, (1991), [理工図書]
- 15) 棚橋隆彦 : 連続体の力学(4), 第 8 章, (1989), [理工図書]
- 16) 棚橋隆彦 : 連続体の力学(6), 第 5 章, (1988), [理工図書]
- 17) 棚橋隆彦・岡永博夫 : 日本機械学会論文集B, **55** (1989), p.749
- 18) 棚橋隆彦、井門康司 : 日本機械学会論文集B, **57** (1991) p.66
- 19) I.E.Tarapov : Magnit Gidrodin, **1** (1972), p.3
- 20) R.Viskanta, D.M.Kim and C.Gau : Int. J. Heat Mass Transf., **29** (1986), p.475
- 21) F.Wolff, C.Beckermann and R.Viskanta : Exp. Thermal Fluid Sci., **1** (1988), p.83