

電磁熱流体力学の基礎と応用(II)

棚橋隆彦

Takahiko TANAHASHI

Theory and Application of Thermo-Magneto Hydro Dynamics (II)

慶応義塾大学理工学部教授
棚橋 隆彦

1941年1月24日生

1964年 慶応義塾大学工学部機械工学科卒業

1969年 工学博士(慶応義塾大学)

1970年 カリフォルニア工科大学(C. I. T)の客員研究員

1985年 慶応義塾大学理工学部教授

1986年 サザンプトン大学の客員教授

1987年 マサチューセッツ工科大学(M. I. T)の客員教授

現在 慶応義塾大学理工学部教授

5 MHDの基礎方程式(特殊論)

第3章と第4章の一般論を基礎として、この章ではMHD近似を行う。その結果、溶融金属の流れを解析するための電磁熱流体の基礎方程式系が導かれる。これらの方程式に初期条件と境界条件が与えられると数値的に解が求められる。また基礎方程式を無次元化するといろいろな無次元数が現れる。これらの無次元数は流れの場を理解するのに役立つ。この章の内容は以下の通りである。

5・1 電磁流体力学の仮定

5・2 MHDの基礎方程式

5・3 うず電流の解析法

5・4 境界条件

5・5 自由表面の境界条件

5・6 無次元数

5・7 無次元数と方程式の近似

5・1 電磁流体力学の仮定

(i) 非圧縮の仮定

電磁流体力学では、一般に電離気体を取り扱う場合と水銀のような液体金属を取り扱う場合がある。ここでは電磁液体を研究の対象とするから、流体は通常の流れて縮まな

いと仮定できる。よって、連続の方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

となる。

(ii) 準定常電磁場の仮定

すべての物質は多かれ少なかれ電場によって分極し、磁場によって磁化される。しかし、その緩和時間は非常に小さく、つねに平衡状態が成り立つとみなすことができる。よって、電気分極ベクトルは電場 $\mathbf{E}$ に、磁気分極ベクトルは磁場 $\mathbf{H}$ に平行であると仮定できる。このとき電磁場の構成方程式は

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

と近似できる。このときMaxwellの応力テンソルは対称($\mathbf{e} : \mathbf{T}_{em} = 0$)となる。

(iii) 無極性の仮定

一般の分散系で構成された電磁流体では、分子やイオン粒子のスピン角運動量も考慮に入れなければならない。しかし、流体が一樣な連続体とみなせる場合、流体粒子の角速度と粒子の平均角速度は等しいと仮定できる。このとき偶応力は発生せず、応力テンソルの反対称部分は零となる。

平成4年1月16日受付 平成4年9月4日受理 (Received on Jan 16, 1992; Accepted on Sep. 4, 1992) (依頼講義)

* Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi Kohoku-ku Yokohama 223

* Key words: MHD(magneto hydro dynamics); plasma; magnetic fluid; liquid metal; FEM(finite element method); CFD(computational fluid dynamics); thermo fluid; theory of micropolar fluid.

(i)、(ii)、(iii)の仮定を運動の方程式に適用すると、圧力項、粘性項、電磁項はそれぞれ

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{T}_p &= -\nabla p_0, \quad \mathbf{T}_p = -p_0 \mathbf{I} \\ \nabla \cdot \mathbf{T}^S &= \eta \nabla^2 \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{T}_{em} &= \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}\end{aligned}$$

となる。ただし、誘電率 ϵ と透磁率 μ は定数とした。この最後の項 $\nabla \cdot \mathbf{T}_{em}$ が流体と電磁場の相互作用を表す。このとき、電磁流体の運動の方程式は

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p_0 + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{b}$$

となる。また $\mathbf{e} : \mathbf{T}_{em} = 0$ より、角運動量の方程式は

$$\mathbf{e} : \mathbf{T}_0 = 0$$

となる。これは応力テンソルの対称性を保証するものである。このような仮定は、磁性流体や電気粘性流体では成立しない。

(iv) 発生熱源零の仮定

普通の電磁流体を取り扱う場合、場の中に消散エネルギー以外の熱源 r は存在しない。したがって、 $r = 0$ となる。

流体が非圧縮の場合 $\Phi_v = 2\eta \mathbf{d} : \mathbf{d}$ であり、この発熱量は流体の粘性が小さいときJoule発熱に比較して小さい。後に述べる電気的中性の仮定を用いると $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$ となるから、Joule発熱は $\Phi_{em} = \mathbf{J}^2 / \sigma$ となる。よって、エネルギーの方程式は

$$\rho T \frac{ds}{dt} = 2\eta \mathbf{d} : \mathbf{d} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

と近似される。さらに、電磁流体の温度変化が無視できるならば、このエネルギーの方程式自体不要となる。しかし、一般には多かれ少なかれ発熱を伴う。

(v) 変位電流の無視

普通の電磁流体は電気伝導性がよい。よって、電磁流体は良導体とみなされる。この結果、変位電流は無視でき、 $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ となる。このときAmpere-Maxwellの法則はAmpereの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$$

で置き換えられる。ただし波動性を有する超高周波の問題では変位電流が無視できない。例えばアンテナ内部のうず電流解析がそのよい例である。

(vi) 電気的中性の仮定

電磁場の変動が急激でないならば、電子とイオンの運動にずれが生じない。このとき電磁流体は中性とみなされる。よって $\rho_e \div 0$ となる。すなわち対流電流 $\rho_e \mathbf{v}$ は伝導電流 $\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ に比べて無視される。このときOhmの法則は

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

となる。また

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}$$

の近似も成立する。さらに運動方程式の中の $\rho_e \mathbf{E}$ も無視することができる。このことは

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_{em} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}$$

なる近似が成立することを表している。

(vii) 物質定数一定の仮定

粘度 η 、誘電率 ϵ 、透磁率 μ 、電気伝導度 σ は運動中一定であると仮定する。このような仮定は変動する温度場、電磁場があまり大きくなければ成立する。しかし、特に温度変化が大きい場合、物質定数は温度の変化に伴って空間の関数となる。

5・2 MHDの基礎方程式

以上の仮定が成立するとき、流れ場と温度場を決定するMHDの基礎方程式は表14のごとく単純化される。ここで角運動量の方程式は応力テンソルの対称性の保証にのみ用いられている。流体の粘性係数が温度に依存しない場合、運動の方程式は

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p_0 + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

となる。以後静水圧 p_0 を p で書くことにする。この運動方程式の回転形表示は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla H + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

である。ここで H はBerroulli関数で

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Omega$$

である。ただし Ω は重力ポテンシャル、 $\nu = \eta / \rho$ は動粘性係数である。回転形表示の回転をとるとうず度の輸送拡散方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right)$$

が導かれる。

一方、電磁場の基礎方程式は変位電流が無視され表15となる。構成方程式も表16のように近似される。さらに、電場の解析が不必要なとき、磁場を解析する近似基礎式は3個のみで

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

となる。ここで $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ は補助方程式として用いることができる。これらの方程式はうず電流を解析するための基礎式となる。

表14 流れ場の基礎方程式(近似式)

質量	$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
運動量	$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\eta \mathbf{d}) + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$
エネルギー	$\rho C_v \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi_v + \Phi_{em}$

ただし、 $\Phi_v = 2\eta \mathbf{d} : \mathbf{d}$ 、 $\Phi_{em} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}$

表15 Maxwellの方程式(準定常理論)

Faradayの法則	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Ampereの法則	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$
Gaussの法則	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
磁荷不在の法則	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

表16 近似構成方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{j} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

5・3 うず電流の解析法

変位電流が無視できる場合のうず電流の解析はFaradayの法則とAmpereの法則とOhmの法則を用いて行なわれる。

(i) A-φ法

磁束密度と電界をベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ を用いて表すと

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

と書ける(前報(I)図6参照)。これをAmpere法則とOhmの法則に代入し電流 $\mathbf{j}$ を消去すると、A-φ法の基礎方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} &= -\nabla \phi - \frac{1}{\sigma} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) \\ \nabla \cdot \left\{ \sigma \left[\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \right] \right\} &= 0 \end{aligned}$$

が導かれる。ここで、2番目の式は $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を意味している。この方程式系はゲージの取り方によっていろいろ変形される。磁気Reynolds数が小さく $(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v}$ の移流項が無視できる場合を考える。物質定数が一定であるとすれば表17の結果を得る。この表の結果は皆同じ物理内容であるが、ゲージ変換のとり方のみが異なっている。移流項が省略できない場合、特にCoulombゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いると、ベクトル・ポテンシャルの方程式はNavier-Stokesの方程式の回転形と同形となる(表18参照)。

(ii) B法

磁束密度 $\mathbf{B}$ が求まれば、Ampereの法則によりうず電流が

求まる。磁束密度に関する誘導方程式はOhmの法則とAmpereの法則の回転をとることにより

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\nu_m \nabla \times \mathbf{B})$$

と求まる。ここで $\nu_m = \frac{1}{\sigma \mu}$ は磁気粘性係数である。 ν_m が一定のとき誘導方程式はうず度輸送拡散方程式と同形になる(表19参照)。

表17 変位電流が無視できる場合のうず電流に対する連立方程式(方程式系(I)、(II)、(III)は皆等価である。)

(I)	$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ $\nabla^2 \phi = -\frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}$	ゲージ変換無し
(II)	$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{A}$ $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \phi$	導体ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \mu \phi = 0$
(III)	$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{A}$ $\nabla^2 \phi = 0$	Coulombゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

表18 動く導体に対するうず電流の方程式とNavier-Stokesの方程式

うず電流	$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} = -\nabla \phi + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{A}$ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$
NS方程式	$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\nabla H + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$ $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \nabla^2 H = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$

表19 誘導方程式とうず度輸送方程式

誘導方程式	$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
うず度輸送方程式	$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$

表20 うず電流に関する積分方程式

$$\begin{aligned} \text{Coulombゲージ} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \\ \mathbf{j} + \frac{\sigma \mu}{4\pi} \iint_{V_\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} dV(\boldsymbol{\xi}) &= -\sigma \nabla \phi \\ \nabla^2 \phi &= 0 \end{aligned}$$

(iii) 積分方程式法

Coulombゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いるとベクトル・ポテンシャルはPoissonの方程式

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}$$

を満足する。この方程式の解は μ を一定とすれば

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} \frac{\mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}, t)}{r} dV(\boldsymbol{\xi})$$

で与えられる。ここで $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$, $r = |\mathbf{r}|$ である。よってこの解を静止導体に対する Ohm の法則に代入するとうず電流を求める積分方程式 (表20) が導かれる。

(iv) 微積分方程式法 (その1)

Ohm の法則の回転をとり Faraday の電磁誘導の法則を用いると

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i)$$

が導ける。ここで $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i$ で $\mathbf{B}_0$ は印加磁場、 $\mathbf{B}_i$ は誘導磁場である。誘導磁場はベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ の回転により

$$\mathbf{B}_i = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} (\nabla \times \frac{1}{r}) \times \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}, t) dV(\boldsymbol{\xi})$$

と求まる。よって両式より誘導磁場 $\mathbf{B}_i$ を消去するとうず電流に関する微積分方程式

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right) + \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_\infty} (\nabla \times \frac{1}{r}) \times \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} dV(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t}$$

が導かれる。この方程式の特長はうず電流の流れる領域のみで解析できることである。

(v) 電流ベクトル・ポテンシャル法

電流は $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を満足するから、ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{\Psi}$ を用いて

$$\mathbf{j} = \nabla \times \boldsymbol{\Psi}$$

と書ける。この電流ベクトル・ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right) &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \mathbf{H} &= \boldsymbol{\Psi} - \nabla \eta \end{aligned}$$

より誘導される連立方程式

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \right) &= -\mu \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} + \mu \nabla \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \nabla^2 \eta &= 0 \end{aligned}$$

の解である。

(vi) 変位電流が無視できない場合

変位電流が無視できない超高周波の場合を考える。この場合 Maxwell の方程式より電解ベクトルと磁界ベクトルに関する Helmholtz の方程式

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{j} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{j} \end{aligned}$$

が導かれる。ここで $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ である。よってベクトル Green の第2公式より導かれる恒等式 (表21)

表21 ベクトル恒等式

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) + \iiint_V k^2 \mathbf{F} \varphi dV &= \iiint_V [(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla \times \mathbf{F}) \times] \nabla \varphi dV \\ &\quad - \iint_S [\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \times] \nabla \varphi dS \end{aligned}$$

ただし, $\varphi = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$ は

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\delta$$

の解である。

を用いると Maxwell の方程式を満足する電界ベクトルと磁界ベクトルの解は表22となる。

表22 Maxwell の方程式の解

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{E}_s(\boldsymbol{\xi}) - \iint_S i\omega \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \varphi dS \\ &\quad - \iint_S [\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times] \nabla \varphi dS \quad (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{H}_s(\boldsymbol{\xi}) + \iint_S i\omega \epsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \varphi dS \\ &\quad - \iint_S [\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times] \nabla \varphi dS \quad (b) \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{E}_s$ と $\mathbf{H}_s$ はソースによる電場と磁場で

$$\mathbf{E}_s(\boldsymbol{\xi}) = \iiint_V (i\omega \mu \mathbf{j} + \frac{\rho_e}{\epsilon} \nabla \varphi) dV$$

$$\mathbf{H}_s(\boldsymbol{\xi}) = \iiint_V \mathbf{j} \times \nabla \varphi dV$$

により定義されている。

表22の積分方程式を解くことによりうず電流が求められる。

(vii) 微積分方程式法 (その2)

(iv) で求めたうず電流を求める積分方程式はさらに簡単化される。それには (v) で導入した電流ベクトル・ポテンシャルと (vi) で用いた表21のベクトル恒等式を用いる。まず表21のベクトル $\mathbf{F}$ を電流ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{\Psi}$ に選ぶ。すなわち $\mathbf{F} = \boldsymbol{\Psi}$ とする。このとき電流ベクトル・ポテンシャルは内部で

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0$$

内部で

導体表面上で

$$\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Psi} = 0$$

表面上で

を満足する。また $k = 0$ とすれば φ は Poisson 方程式

$$\nabla^2 \varphi = -\delta$$

の解 $\varphi = \frac{1}{4\pi r}$ となる。このとき、電流と電流ベクトル・ポテンシャルは関係式

$$4\pi \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) = \iiint_V \mathbf{j} \times \nabla \frac{1}{r} dV(\mathbf{x}) - \iint_S (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Psi}) \nabla \frac{1}{r} dS(\mathbf{x})$$

を満足する。すなわち、電流分布 $\mathbf{j}$ が与えられるとこの式に

より電流ベクトル・ポテンシャルが求まる。またこの式の右辺第1項が誘導磁場であることを考慮する。 $\mathbf{x}$ と ξ を入れかえて、

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \mathbf{j} \times \nabla_{\xi} \frac{1}{r} dV(\xi) = \mu \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \phi_n \nabla_{\xi} \frac{1}{r} dS(\xi)$$

が導ける。この式は誘導磁場が電流ベクトル・ポテンシャルより直接計算できることを表している。よって

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right) = - \frac{\partial (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i)}{\partial t}$$

に代入して、うず電流を解析する電流ベクトル・ポテンシャルの微積分方程式

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{\Psi} \right) + i\omega \mu \mathbf{\Psi} + \frac{i\omega \mu}{4\pi} \iint_S \mathbf{\Psi}_n \nabla_{\xi} \frac{1}{r} dS(\xi) + i\omega \mathbf{B}_0 = 0$$

が導ける。ただし、時間微分は $i\omega$ で置き換えられている。

例題3 ベクトル恒等式

任意のベクトル関数 $\mathbf{F}$ に対してベクトル恒等式

$$\mathbf{F}(\xi) + \iiint_V k^2 \mathbf{F} \varphi dV = \iiint_V [\nabla \cdot \mathbf{F} + (\nabla \times \mathbf{F}) \times \nabla] \varphi dV - \iint_S [\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \times \nabla] \varphi dS$$

が成立する。このベクトル恒等式を証明しなさい。ただし、

$$\varphi = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

はHelmholtz方程式

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\delta(\mathbf{x} - \xi)$$

の基本解である。ここで $r = |\mathbf{x} - \xi|$ 、 δ はDiracのデルタ関数である。(解答は6章末に掲載)

5・4 境界条件

境界条件は速度場・温度場・電磁場についてそれぞれ成立しなければならない。

(i) 速度場

固体表面での流体の速度 $\mathbf{v}$ は壁面の動く速度 $\mathbf{w}$ に等しいという粘着条件 (no-slip条件)

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

を用いる。特に静止壁面のとき $\mathbf{w} = 0$ であるから $\mathbf{v} = 0$ となる。出入口では速度分布または圧力分布のどちらか一方が与えられる。

(ii) 温度場

温度の境界条件は統一的に

$$\alpha k \frac{\partial T}{\partial n} + \beta T = \gamma$$

で与えられる。この境界条件は α 、 β 、 γ の選び方によって

- | | |
|---|---------|
| (a) $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = \hat{T}$ | 温度境界条件 |
| (b) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -\hat{q}$ | 熱流束境界条件 |
| (c) $\alpha = 1, \beta = h, \gamma = h T_{out}$ | 熱伝達境界条件 |

となる。(b)で $\hat{q} = 0$ ならば断熱条件となる。ここで k は熱伝導率、 h は対流熱伝達係数である。

(iii) 電磁場

電磁場の2媒質境界での境界条件はMaxwellの方程式を図7に示された体積要素で積分することによって導かれる。積分を実行し表23の境界条件を誘導する。特に表面電流と表面電荷がないとき、法線成分と接線成分の連続・不連続に関して表24の関係式が成立する。

表23 電磁場の境界条件(その1)

微分方程式	境界条件	媒質2が完全導体の場合
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2 = 0$	$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 = 0$
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{j}_s$	$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{j}_s$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$	$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_s$	$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_s$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{B}_2 = 0$	$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{j}_s + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{j}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{j}_s + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{j}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$

$$\therefore [\mathbf{E}_t] = 0, [\mathbf{H}_t] = \mathbf{j}_s \times \mathbf{n}_2, [D_n] = \rho_s, [B_n] = 0$$

表24 電磁場の境界条件(その2)

	連続	不連続
接線成分	$\mathbf{n} \times [\mathbf{E}] = 0$	$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \frac{J_{t1}}{J_{t2}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$
	$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}] = 0$	$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$
法線成分	$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}] = 0$	$\frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$
	$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}] = 0$	$\frac{H_{n2}}{H_{n1}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$
	$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{j}] = 0$	$\frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

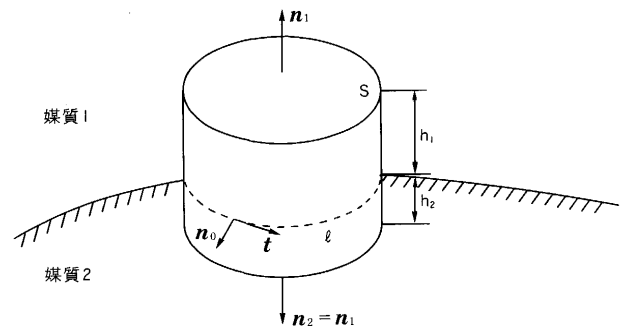


図7 2媒質境界条件

$$\text{表面電流密度 } \mathbf{j}_s = \lim_{h \rightarrow 0} (\mathbf{j}_1 h_1 + \mathbf{j}_2 h_2)$$

$$\text{表面電荷密度 } \rho_s = \lim_{h \rightarrow 0} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)$$

誘導：微分方程式を図7の円筒状の体積要素について積分する。表23の上の2つの式については回転定理を、残りの3つについてはGaussの定理を適用し、体積分を面積分に変

換する。その結果つぎの5個の式

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{E} dS &= - \iiint_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV \\ \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{H} dS &= \iiint_V (\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) dV \\ \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} dS &= \iiint_V \rho_e dV \\ \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dS &= 0 \\ \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} dS &= - \iiint_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV\end{aligned}$$

が導かれる。ここで積分を実行する。図7において $h_1 \rightarrow 0$ 、 $h_2 \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) のとき、一般に円筒の側面積の積分への寄与は零となる。例えば最初の式は積分結果

$$(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2) S = - \left(\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} h_1 + \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} h_2 \right) S$$

となる。ここで S は円筒の断面積である。上式の両辺を S で割り、 $h_1 \rightarrow 0$ 、 $h_2 \rightarrow 0$ とすれば右辺は零となるから電界に対する境界条件

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2 = 0$$

を得る。同様に第2式から磁界に対する境界条件

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{j}_s$$

が導かれる。ただし、表面電流密度は

$$\mathbf{j}_s \equiv \lim_{h \rightarrow 0} (\mathbf{j}_1 h_1 + \mathbf{j}_2 h_2)$$

で定義されている。表面電荷密度を

$$\rho_s \equiv \lim_{h \rightarrow 0} (\rho_{e1} h_1 + \rho_{e2} h_2)$$

で定義すると、第3式より電束密度の境界条件は

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_s$$

と求まる。同様にして磁束密度の境界条件は第4式より求まる。最後に電流に対する境界条件を求める。電流の境界条件には側面積の寄与が残る。この点がMaxwellの方程式より得られた上の4つの境界条件とは異なる。電荷保存則の積分結果は

$$\oint \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{j}_1 h_1 + \mathbf{j}_2 h_2) dl + (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{j}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{j}_2) S = - \left(\frac{\partial \rho_{e1}}{\partial t} h_1 + \frac{\partial \rho_{e2}}{\partial t} h_2 \right) S$$

となる。ここで $\mathbf{n}_0$ は円筒側面の単位法線ベクトルである。両辺を S で割り、 $h_1 \rightarrow 0$ 、 $h_2 \rightarrow 0$ とすれば電流の境界条件

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{j}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{j}_2 = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

が導かれる。ここで、2次元の表面電流の発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s = \frac{1}{S} \oint \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{j}_s dl$$

である。

(誘導 終わり)

(iv) Snellの法則

一般にソレノイダル場のベクトルに関しては不連続面でベクトルの法線成分が連続であり、非回転場のベクトルに関しては不連続面でベクトルの接線成分が連続となる。よって、 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を満足する $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{j}$ に関して、不連続面でそれらのベクトルの法線成分が連続となる (表25、表27参照)。一方 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 、 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ を満足する $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ に関しては、不連続面でそれらのベクトルの接線成分が連続となる (表26、表27参照)。その結果、ベクトル $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{j}$ の不連続面での屈折に関して、Snellの法則

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

が成立する (図8参照)。よって

$$\begin{aligned}\mu_2 \gg \mu_1 \quad \text{ならば} \quad \tan \theta_1 &\approx 0 \\ \sigma_1 \gg \sigma_2 \quad \text{ならば} \quad \tan \theta_2 &\approx 0\end{aligned}$$

となる。このような条件は透磁率の非常に大きい物質や良導体の表面で満たされる。

表25 発散零の場合に対する境界条件

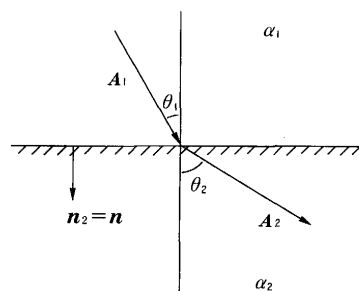
$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2$	$\mathbf{D}_{n1} = \mathbf{D}_{n2}$	$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2$	$\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2}$	$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$
$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_2$	$\mathbf{j}_{n1} = \mathbf{j}_{n2}$	$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

表26 回転零の場合に対する境界条件

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\eta \times \mathbf{E}_1 = \eta \times \mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}$	$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$
$\nabla \times \mathbf{H} = 0$	$\eta \times \mathbf{H}_1 = \eta \times \mathbf{H}_2$	$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$	$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\eta \times \mathbf{E}_1 = \eta \times \mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}$	$\frac{j_{t1}}{j_{t2}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

表27 類似性

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$	$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{C}$	$\nabla \times \mathbf{C} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	$\nabla \times \mathbf{H} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$	$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$



$$\tan \theta_i = \frac{A_{ti}}{A_{ni}}$$

$$A_{n1} = A_{n2},$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{A_{t1}}{A_{t2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

図8 Snellの法則

5.5 自由表面

ここでは自由表面の境界条件について考察する。自由表面には表面張力が作用する。表面張力は法線応力とせん断応力に不連続性をもたらす。

(i) 表面張力圧力の表示

図9を参照すると表面張力圧力は

$$P_C = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\sigma}{S} \oint_C \mathbf{t} \, ds.$$

で定義できる。ここで σ は表面張力、 S は閉曲線 C で囲まれた表面積、 $\mathbf{t}$ は境界 C に垂直な表面張力方向のベクトル、 ds は曲線 C の線要素である。このとき関係式

$$\mathbf{t} = d\mathbf{s} \times \mathbf{n} / ds$$

が成立する。よって表面張力圧力は

$$P_C = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\sigma}{S} \oint_C d\mathbf{s} \times \mathbf{n}$$

と表示できる。ここで一般化Stokesの定理を用いて、線積分を面積分に変換すると

$$\begin{aligned} \oint_C d\mathbf{s} \times \mathbf{n} &= \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{n} \, dS \\ &= -\iint_S \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n}) \, dS + \iint_S (\nabla \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned}$$

となる。ところが、この最後の項は

$$2(\nabla \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \nabla (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0$$

により零となる。よって表面張力圧力は単位法線ベクトルの発散を用いて、

$$P_C = -\sigma \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n})$$

と表示できる。

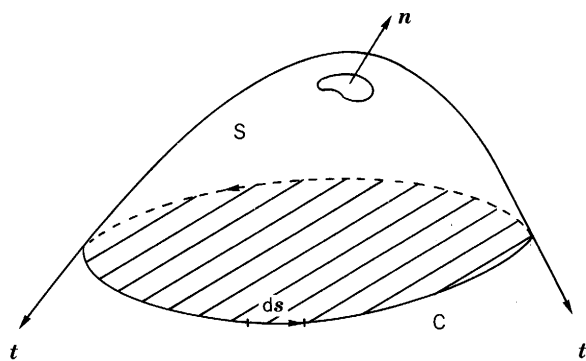


図9 表面張力圧力 $P_C = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\sigma}{S} \oint_C \mathbf{t} \, ds$

(ii) 平均曲率半径の表示

平均曲率半径を用いると表面張力圧力は

$$P_C = -P_C \mathbf{n} = -\frac{2\sigma}{R} \mathbf{n}$$

となる。他方

$$P_C = -\sigma \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n})$$

であるから、平均曲率半径は法線ベクトルの発散として

$$\frac{2}{R} = \nabla \cdot \mathbf{n}$$

と表示できる。いま曲面形状を高さ関数 ζ を用いて

$$z = \zeta(x, y, t)$$

曲面の方程式

で表せば、曲面上の単位法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = \frac{-\zeta_x \mathbf{i} - \zeta_y \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}}$$

となる。ここで $\zeta_x = \partial \zeta / \partial x$, $\zeta_y = \partial \zeta / \partial y$ である。高次オーダーを無視して線形近似すれば、上式の分母は1で近似できる。よって

$$\mathbf{n} = -\zeta_x \mathbf{i} - \zeta_y \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = -\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

となる。よってこの近似のもとで平均曲率半径は高さ関数 ζ で

$$\frac{2}{R} = -\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

と表示できる。

(iii) 自由表面の運動方程式

境界面が運動する場合

$$F = z - \zeta(x, y, t)$$

とすれば、境界面での運動学的条件(kinematic condition)は

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad \text{または} \quad v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

で与えられる。これは界面の運動速度が流速

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

に等しいことを表している(図10参照)。

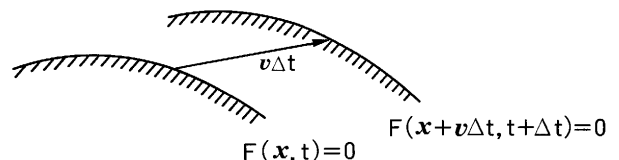


図10 移動する境界面

(iv) つり合い条件式

自由表面上で表面張力(surface tension) σ が作用している場合の境界条件について考える。このとき自由表面での圧力差 $[p]$ は表面張力圧(capillary pressure)に等しく、せん断応力差 $[\tau]$ は表面張力のこう配に等しい。すなわち

$$[p] = p_c = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R}$$

$$[\tau] = \tau_\sigma = \frac{d\sigma}{dT} \nabla T = \sigma_T \nabla T$$

が成立する。ここで、 $[\]$ は跳躍量を意味し、 R_1 と R_2 は図 11 に示された自由表面の主曲率半径である。また

$$\sigma_T = \frac{d\sigma}{dT}$$

は表面張力温度係数、 T は絶対温度である。すなわち、表面張力によって法線応力とせん断応力は自由表面上で不連続となる。接触面が平らならば $R_1 = \infty$ 、 $R_2 = \infty$ で $p_c = 0$ となり、法線応力は連続となる。また、表面が球ならば $R_1 = R_2 = R$ で R は球の半径である。

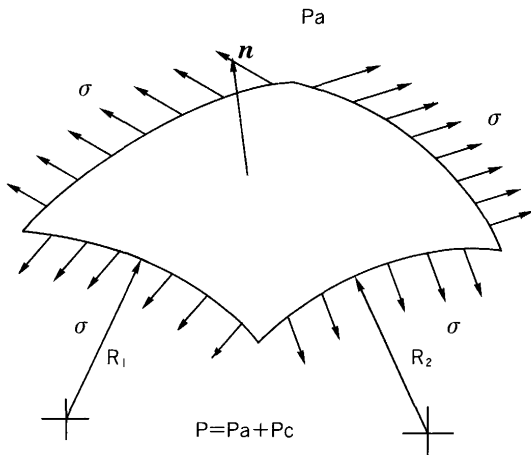


図11 表面張力と主曲率半径 (p_a = 大気圧)

Marangoni対流：表面張力によって駆動される流れをMarangoni対流とよぶ。面の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ 、面上の流れ方向の単位ベクトルを $\mathbf{s}$ とすれば、せん断応力の不連続条件は

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} = -\frac{\sigma_T}{\eta} \frac{\partial T}{\partial s}$$

と記述できる。ここで v_s は表面流速、 η は液体の粘性係数である。

5・6 無次元数

基礎方程式を無次元化すると、いろいろな無次元数が現れる。無次元数は流れ場および電磁場の特性を表示するのに用いられる。

(i) 流れ場の無次元数

各物理量の代表量を

$$v \sim U, \quad x \sim L, \quad p \sim \rho U^2, \quad t \sim L/U \\ B \sim B, \quad E \sim UB, \quad j \sim J = \sigma UB$$

と選ぶ。このとき基礎方程式はつぎのように無次元化される。

$$\frac{dv}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 v + \frac{Ha^2}{Re} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{Rm} \nabla^2 B + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{Rm} \nabla \times \mathbf{B}$$

すなわち、3個の無次元数

$$Re = \text{Reynolds数} = \frac{UL}{\nu} \sim \frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}{\nu \nabla^2 \mathbf{v}} = \frac{\text{慣性項}}{\text{粘性項}}$$

$$Rm = \text{磁気Reynolds数} = \frac{UL}{\nu_m} \sim \frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\nu_m \nabla^2 \mathbf{B}} = \frac{\text{移流項}}{\text{拡散項}}$$

$$Ha = \text{Hartmann数} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} BL \sim \sqrt{\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B} / \rho}{\nu \nabla^2 \mathbf{v}}} = \sqrt{\frac{\text{電磁力}}{\text{粘性力}}}$$

によって場は完全に特徴づけられる。Reynolds数は流体の慣性力と粘性力の比を表している。流速の速い流れでは Re は大きく、遅い流れでは小さくなる。磁気Reynolds数はReynolds数に対応する。電気伝導度 $\sigma = \infty$ の完全導体では $\nu_m = 0$ で磁場は拡散しない。Hartmann数は電磁力と粘性力の比の平方根を与えるもので、磁場の強さの目安となる。

表28、表29、表30に無次元化された方程式を、表31に無次元数をまとめておく。

表28 無次元化された流れ場の基礎方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{W^2}{Re} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{Gr}{Re^2} T \hat{\mathbf{g}} + \frac{Ha^2}{Re} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{W^2}{Re} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 T + \frac{Ec}{Re} \Phi_v + \frac{Ha^2 Ec}{Re} \Phi_{em}$$

ただし、

$$\frac{Ha^2}{Re} = Rm R_p, \quad Pe = Pr Re, \quad Ra = Gr Pr, \quad Rm = Pm Re$$

$$\omega = \frac{1}{t_0} = \frac{U}{L} \text{ のとき } \frac{W^2}{Re} = \frac{W_m^2}{Rm} = \frac{\omega L}{U} = 1$$

表29 無次元化されたMaxwellの方程式

$$\gamma \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{W_m^2}{Rm} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = Rm \mathbf{j}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\text{ただし、} E = UB \text{ のとき } \gamma = \frac{E}{UB} = 1$$

表30 無次元化された誘導方程式とOhmの法則

$$\begin{aligned}\frac{W_m^2}{R_m} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B} \\ \mathbf{j} &= \gamma \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{R_m} \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0\end{aligned}$$

表31 無次元数

(a) 基本無次元数

Reynolds数	$Re = \frac{UL}{\nu}$	慣性項 粘性項	$\frac{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}{\nu \nabla^2 \mathbf{v}}$	
磁気 Reynolds数	$R_m = \frac{UL}{\nu_m}$	移流項 拡散項	$\frac{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B}}{\nu_m \nabla^2 \mathbf{B}}$	$R_m = P_m Re$
磁気圧数	$R_p = \frac{\mu H^2}{\rho U^2}$	磁気圧 動圧	$\frac{\mu H^2/2}{\rho U^2/2}$	
Hartmann数	$Ha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} BL$	(電磁力) (粘性力)	$\left(\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{\nu \nabla^2 \mathbf{v}} \right)^{1/2}$	$Ha^2 = Re R_m R_p$

(b) 無次元振動数

Wormersley数	$W = L \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$	(非定常項) 粘性項	$\left(\frac{\partial \mathbf{v} / \partial t}{\nu \nabla^2 \mathbf{v}} \right)^{1/2}$	
磁気 Wormersley数	$W_m = L \sqrt{\frac{\omega}{\nu_m}}$	(非定常項) 拡散項	$\left(\frac{\partial \mathbf{B} / \partial t}{\nu_m \nabla^2 \mathbf{B}} \right)^{1/2}$	

(c) 圧縮性を示す無次元数

Mach数	$M = \frac{U}{a}$	流速 音速	$\frac{U}{a}$	
磁気 Mach数	$M_m = \frac{U}{U_A}$	流速 Alfven速度	$\frac{U}{B/\sqrt{\rho \mu}}$	$R_p = \frac{1}{M_m^2}$

(d) 熱関係の無次元数

Prandtl数	$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$	粘性拡散 熱拡散	$\frac{\nu}{\alpha}$	$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$
磁気 Prandtl数	$P_m = \frac{\nu}{\nu_m}$	粘性拡散 磁気拡散	$\frac{\nu}{\nu_m}$	$\nu_m = \frac{1}{\sigma \mu}$
Peclet数	$Pe = \frac{UL}{\alpha}$	熱対流 熱拡散	$\frac{\mathbf{v} \cdot \nabla T}{\alpha \nabla^2 T}$	$Pe = Pr Re$
Grashof数	$Gr = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2}$			$Gr = \frac{Ra}{Pr}$
Rayleigh数	$Ra = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\alpha \nu}$			$Ra = Gr Pr$
Nusselt数	$Nu = \frac{hL}{k}$	熱伝達 熱伝導	$\frac{Q_{conv}}{Q_{cond}}$	
Ec kert数	$Ec = \frac{U^2}{C_p \Delta T}$	圧力増加 エネルギー増加	$\frac{\rho U^2}{\rho C_p \Delta T}$	

(e) その他の無次元数

Stuart数	$St = \frac{H_a^2}{Re} = R_m R_p$		
相互作用係数	$N = St$		$N = R_m R_p$
シールド パラメータ	$\beta = \frac{L^2}{\nu_m t_0}$	$t_0 = \frac{1}{\omega}$ のとき	$W_m = \sqrt{\beta}$ $W_m = \sqrt{\beta}$
電圧効果 パラメータ	$\gamma = \frac{E}{UB}$	$E = UB$ のとき	$\gamma = 1$

(f) 境界条件に現れる無次元数

Marangoni数	$Ma = \frac{\sigma_T \Delta T}{\eta \alpha}$		
Cavitation数	$Ca = \frac{p_a - p_0}{\rho U^2}$	圧力差 動圧	$\frac{p_a - p_0}{\rho U^2}$
Froude数	$Fr = \frac{U^2}{gL}$	動圧 静圧	$\frac{\rho U^2}{\rho g L}$
Weber数	$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$	動圧 表面張力圧	$\frac{\rho U^2}{\sigma/L}$

(a) 基本無次元数

電磁場の流れを特長づける基本無次元数は表31(a)の3個の無次元数

Reynolds数, 磁気Reynolds数, 磁気圧数

である。Hartmann数はこれらの無次元数の積より誘導される無次元数である。すなわち

$$Ha^2 = Re R_m R_p$$

の関係にある。そして

$$\frac{H_a^2}{Re} = R_m R_p = St = N$$

と書いてStをStuart数、Nを相互作用係数とよぶこともある。

(b) 無次元振動数

周期的な振動流に対して代表時間を $t_0 \sim \frac{1}{\omega}$ で評価すると表28や表29に示されているように運動方程式の非定常項と誘導方程式の非定常項は

$$\frac{W^2}{Re} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad \frac{W_m^2}{R_m} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

と無次元化される。ここで表31(b)に示されているように、 W = Wormersley数、 W_m = 磁気Wormersley数でそれぞれ無次元振動数を表している。ここで

$$\frac{W^2}{Re} = \frac{W_m^2}{R_m} = \frac{\omega L}{U}$$

である。したがって過渡流において $\omega = \frac{U}{L}$ に選べば

$$\frac{W^2}{Re} = \frac{W_m^2}{R_m} = 1$$

となり係数は消える。また $\omega = \frac{1}{t_0}$ のときの $W_m^2 = \frac{L^2}{\nu_m t_0} = \beta$ をシールド・パラメータとよぶこともある。このように代表時間は過渡流と周期流で異なり

$$\begin{cases} \text{過渡流} & t_0 \sim \frac{L}{U} \\ \text{振動流} & t_0 \sim \frac{1}{\omega} \end{cases}$$

となる。

(c) 圧縮性

流体の圧縮性を示す無次元数にMach数

$$M = \frac{U}{a} \quad \text{Mach 数}$$

がある。これは流速と音速の比である。これに対応して圧縮性電磁流体には磁気Mach数が

$$M_m = \frac{U}{U_A} \quad \text{磁気 Mach 数}$$

が定義される。ここで U_A はAlfven速度で

$$U_A = \frac{B}{\sqrt{\rho\mu}}$$

により定義される。このとき磁気圧数は磁気Mach数の2乗の逆数となる。すなわち関係式

$$R_p = \frac{1}{M_m^2}$$

を満足する (表31(c)参照)。

(ii) 温度場の無次元数

エネルギー方程式を無次元化すると

$$\frac{W^2}{R_e} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{P_r R_e} \nabla^2 T + \frac{E_c}{R_e} \Phi_v + \frac{H_e^2 E_c}{R_e} \Phi_{em}$$

となる (表28参照)。このように温度場にはいろいろな無次元数が表れる (表31(d)参照)。

(a) 拡散項

速度場・温度場・磁場の拡散項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{v} & \quad \text{Reynold 数} \\ \frac{1}{P_e} \nabla^2 T &= \frac{1}{P_r R_e} \nabla^2 T \quad \text{Peclet 数} \\ \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{P_m R_e} \nabla^2 \mathbf{B} \quad \text{磁気 Reynolds 数} \end{aligned}$$

と無次元化される。ここで $P_e = P_r R_e$ $R_m = P_m R_e$ である。すなわち、Reynolds数・Peclet数・磁気Reynolds数がそれぞれ拡散を支配する無次元数となる。ここでPrandtl数は $P_r = \nu/\alpha$ 、磁気Prandtl数は $P_m = \nu/\nu_m$ である。

(b) 発熱項

発熱項には運動エネルギーが熱エネルギーに変換される散逸エネルギー Φ_v と電磁エネルギーが熱エネルギーに変換されるJoule発熱 Φ_{em} がある。これらはそれぞれ

$$\frac{E_c}{R_e} \Phi_v, \quad \frac{H_e^2 E_c}{R_e} \Phi_{em}$$

と無次元化される。ここで Ec はEckert数で

$$Ec = \frac{U^2}{C_p \nabla T} \sim \frac{\text{力学的エネルギー増加}}{\text{熱エネルギー増加}} = \frac{\rho U^2}{\rho C_p \nabla T}$$

によって定義されている。一般にこれらの2つの項は小さく無視できる場合が多い。しかしHartmann数 G_r が大きい場合Joule発熱を無視することができない。

(c) 浮力項

流体は熱せられると軽くなり浮力が作用する。この項は運動方程式に表れ、浮力項は

$$\frac{G_r}{R_e^2} T \hat{\mathbf{g}}$$

と無次元化される (表28参照)。ここで $\hat{\mathbf{g}}$ は重力の単位ベクトル、 G_r はGrashof数で表31(d)に定義されている通りである。その他の無次元数としてRayleigh数

$$Ra = G_r P_r$$

やNusselt数

$$Nu = \frac{hL}{k} \sim \frac{Q_{conv}}{Q_{cond}} = \frac{h \nabla T}{k \nabla T/L}$$

がある。

Nusselt数は無次元化された対流熱伝達係数に相当する。

(d) 自然対流における代表流速

自然対流における代表速度の選び方には表32の4通りの方法がある。これにより無次元数の現れ方がいろいろ変化する。特に高Rayleigh数の流れに対しては $Re = \frac{1}{Pr}$ に選ぶのがよい。これによりエネルギー方程式の数値解法が安定化する。

表32 代表速度の選び方と無次元数の関係

選び方	Re	$\frac{G_r}{R_e^2}$	$Pe = Re P_r$	適用範囲
$Re = G_r$	G_r	$\frac{1}{G_r}$	Ra	$G_r \leq 1, Ra \leq 1$
$Re = G_r^{1/2}$	$G_r^{1/2}$	1	Pe	$G_r \geq 1, P_r \leq 1$
$Re = (G_r/P_r)^{1/2}$	$(G_r/P_r)^{1/2}$	P_r	$(G_r P_r)^{1/2}$	$G_r \geq 1, P_r > 1$
$Re = \frac{1}{P_r}$	$\frac{1}{P_r}$	$Ra P_r$	1	$G_r \gg 1, P_r > 1$

$$Ra = G_r P_r, \quad Pe = Re P_r$$

基礎方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{G_r}{R_e^2} T \hat{\mathbf{g}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{P_e} \nabla^2 T$$

(iii) 電磁場の無次元数

Maxwellの方程式を無次元化するとAmpereの法則とFaradayの電磁誘導の法則はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{1}{R_m} \nabla \times \mathbf{B} \\ \gamma \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{W_m^2}{R_m} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

となる (表29参照)。ここで

$$\gamma = \frac{E}{UB}$$

で電圧効果パラメータである。これは印加電場がある場合電界が

$$E \sim E$$

で評価されるために現れる新しい無次元数である。誘導電界のみならば

$$E \sim UB$$

であるから $\gamma = 1$ となりこの無次元数は消える。これは代表時間の選び方に2通りの方法があったことに対応する (表33参照)。

表33 時間と電界の代表値

	(I)	(II)
代表時間 t_0	$\frac{L}{U}$	$\frac{1}{\omega}$
代表電界 E	UB	E

(a)誘導方程式

誘導方程式は

$$\frac{W_m^2}{R_m} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B}$$

と無次元化される。

(b)Ohmの法則

Ohmの法則は

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

と無次元化される (表30参照)。ここにも電圧効果パラメータ γ が現れる。

(iv)自由表面に現れる無次元数

ここでは法線不連続と接線不連続について調べる。

(a)法線不連続

自由表面での圧力条件は図11を参照して

$$p = p_a + p_c = p_a + \frac{2\sigma}{R}$$

となる。ここで p_a は大気圧 (air)、 p_c は表面張力圧である。いま圧力を

$$\frac{p + \rho g \zeta - p_0}{\rho U^2}$$

で無次元化する。このとき圧力条件式は

$$p = C_a + \frac{1}{F_m} \zeta + \frac{2}{WeR}$$

と無次元化される。この圧力条件式にあらわれる3個の無次元数は

$$C_a = \frac{p_a - p_0}{\rho U^2} \quad \text{Cavitation数}$$

$$F_r = \frac{U^2}{gL} \quad \text{Froude数}$$

$$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} \quad \text{Weber数}$$

である。Cavitation数は流体中に気泡があるとき重要になる無次元数である。 p_0 は気泡内の圧力である。Froude数は自由表面を形成するのに必要な重力の影響を表している。Weber数は自由表面の表面張力の効果を表し、自由表面の曲率半径が小さい場合重要となる (表31(f)参照)。

(b)接線不連続

せん断応力の不連続条件は

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} = -\frac{\sigma_T}{\eta} \frac{\partial T}{\partial s}$$

で与えられた。この境界条件を無次元化すると

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} = \frac{M_a}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial s}$$

となる。ただし Ma は

$$Ma = \frac{\sigma_T L \nabla T}{\eta \alpha} \quad \text{Marangoni数}$$

で定義されるMarangoni数である。すなわち、Marangoni対流の現象はこのMarangoni数の大小により流れの状態が大きく変化する。表面張力の存在によって現れる無次元数は表34のとおりである。

表34 表面張力の影響を示す無次元数

法線不連続	Weber数	$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$
接線不連続	Marangoni数	$Ma = \frac{\sigma_T L \Delta T}{\eta \alpha}$

5・7 無次元数と方程式の近似

(i)境界層の厚さ

ここでは定常場と交流場の境界層の厚さについて調べる。

(a)定常場の境界層

速度境界層・磁気境界層・温度境界層の類似性を調べる。

これらの境界層はすべて対流項と拡散項のバランスによって生ずる。速度境界層の厚さ δ_v は

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta_v^2}$$

$$\therefore \frac{\delta_v}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad \text{ただし } Re = \frac{UL}{\nu}$$

と見積られる。同様に磁気境界層の厚さ δ_m は

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \sim \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}$$

$$\frac{UB}{L} \sim \nu_m \frac{B}{\delta_m^2}$$

$$\therefore \frac{\delta_m}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_m}}, \text{ ただし } Re_m = \frac{UL}{\nu_m}$$

と見積られる。温度境界層の厚さ δ_T も同様に

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T \sim \alpha \nabla^2 T$$

$$\frac{UT}{L} \sim \alpha \frac{T}{\delta_T^2}$$

$$\therefore \frac{\delta_T}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Pe}}, \text{ ただし } Pe = \frac{UL}{\alpha}$$

となる。これらの結果を表35にまとめておく。

表35 境界層の厚さ

速度境界層	$\frac{\delta_s}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$
磁気境界層	$\frac{\delta_m}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_m}}$
温度境界層	$\frac{\delta_T}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Pe}}$

$$\therefore \frac{\delta_v}{\delta_T} \sim \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}, \quad \frac{\delta_v}{\delta_T} \sim \sqrt{\frac{\nu}{\nu_m}}$$

(b) 交流場の境界層

平板が振動している場合、その平板上における振動流の境界層の厚さは非定常項と拡散項のつり合いより求まる。すなわち、振動流の境界層の厚さ δ_o は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\omega U \sim \nu \frac{U}{\delta_o^2}$$

$$\therefore \frac{\delta_o}{L} \sim \frac{1}{W}, \text{ ただし } W = L \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

と見積られる (図12参照)。つぎに交流磁場の表皮厚さ δ_s を評価する。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \sim \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}$$

$$\omega B \sim \nu_m \frac{B}{\delta_s^2}$$

$$\frac{\delta_s}{L} \sim \frac{1}{W_m} \text{ ただし, } W_m = L \sqrt{\frac{\omega}{\nu_m}}$$

すなわち、交流磁場の表皮厚さ δ_s は磁気Womersley数の逆数に比例する。振動数が増加するほど境界層の厚さは薄くなる。Hartmann境界層は定常流れであるが振動流の境界層と類似する。なぜならばHartmann流れは対流項は無関係で粘性力と電磁力のつり合いによって生ずるからである。よってHartmann境界層の厚さを δ_H とすれば、その厚さは

$$\nu \nabla^2 \mathbf{v} \sim \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

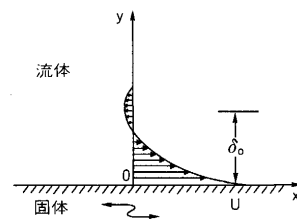
$$\nu \frac{U}{\delta_H^2} \sim \frac{\sigma UB^2}{\rho}$$

$$\frac{\delta_H}{L} \sim \frac{1}{Ha} \text{ ただし, } Ha = BL \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$$

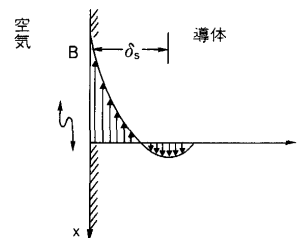
と評価される。以上の結果を表36にまとめておく。

表36 振動境界層の厚さ

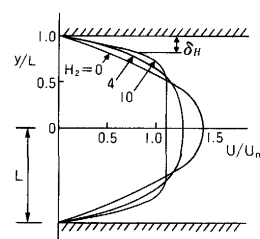
振動流の境界層の厚さ	$\frac{\delta_o}{L} \sim \frac{1}{W}$
交流磁場の表皮厚さ	$\frac{\delta_s}{L} \sim \frac{1}{W_m}$
Hartmann境界層の厚さ	$\frac{\delta_H}{L} \sim \frac{1}{Ha}$



(a) 振動流



(b) 交流磁場



(c) Hartmann流れ

図12 振動境界層とHartmann境界層

(ii) 低周波数近似

周波数が低いとき電界を $\mathbf{E} \sim U\mathbf{B}$ で評価すると

$$\frac{\partial \mathbf{B} / \partial t}{\nabla \times \mathbf{E}} = \frac{\omega L}{U} = \frac{W_m^2}{Re_m} \ll 1$$

となる近似が成立し、Faradayの電磁誘導の法則は

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

となる。よって電界ベクトルはスカラー・ポテンシャルのこう配として

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

と表すことができる。一方、溶融金属に対して $\sigma\mu = 1 \sim 10$ (m²/s) 程度であり、かつ多くの冶金プロセスにおいて $UL < 1$ (m²/s) の条件が満たされる。よって磁気Reynolds数が

$$R_{em} \ll 1$$

である仮定はかなり良い近似で成立する。以上より低周波数の溶融金属の流れに対して、多くの場合

$$W_m^2 \ll R_{em} \ll 1$$

が近似的に成立する。このとき誘導方程式は

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0$$

で近似できる。これはAmpereの法則とOhmの法則を組合せた関係式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} = \sigma \mu \mathbf{E}$$

の両辺の回転をとり、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 、 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ を用いると導かれる。すなわち、磁束密度はLaplaceの方程式の解となる。

(iii) 溶融金属の流れに対してよく用いられる仮定

(a) 磁気Reynolds数 $R_m \ll 1$ の仮定

Navier-Stokes方程式の回転をとるとうず度輸送拡散方程式が導かれる。これを無次元化して示すと

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \omega$$

となる。ここで R_e はReynolds数で

$$R_e \equiv \frac{LU}{\nu}$$

と定義されている。うず度輸送拡散方程式に対応するのが磁束密度に関する誘導方程式である。誘導方程式はOhmの法則

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

の両辺の回転をとることにより導かれる。これを無次元化して示すと

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B}$$

となる。ここで R_m は磁気Reynolds数で

$$R_m \equiv \frac{LU}{\nu_m} = \sigma \mu LU$$

と定義されている。そして $\nu_m = \frac{1}{\sigma \mu}$ は磁気粘性係数である。多くの溶融金属の流れに対して、磁気Reynolds数は小さく

$R_m \ll 1$ の仮定が成立する。これは $R_e \ll 1$ の遅い流れ、すなわちStokes流れに対応し、誘導方程式の対流項 $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ が無視できることを表している。その結果、電磁場はLorentz力 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ によって流れ場に影響を与えるが、流れ場は電磁場にはほとんど影響を与えない (図13参照)。

$$\begin{array}{ll} \text{電磁場} & \text{誘導方程式} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B} \\ \downarrow & \\ \text{流れ場} & \text{Lorentz力} \quad \mathbf{f}^L = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{array}$$

図13 電磁場と流れ場の相互作用 ($R_m < 1$)

(b) Prandtl数 $P_r \ll 1$ の仮定

Prandtl数は

$$P_r \equiv \frac{\nu}{\alpha}$$

で定義される。ここで ν は動粘性係数、 α は温度拡散係数である。速度境界層の厚さ δ_v と温度境界層の厚さ δ_T はそれぞれ慣性項と拡散項のつり合いより

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim \nu \nabla^2 \mathbf{v} & \therefore \frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta_v^2} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla T \sim \alpha \nabla^2 T & \therefore \frac{UT}{L} \sim \alpha \frac{T}{\delta_T^2} \end{array}$$

と評価できる。よって U が同一のとき

$$\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}} \sim \frac{\delta_v}{\delta_T}$$

となる。すなわち、拡散係数の比の平方根は境界層の厚の比に比例する。熱伝導のよい溶融金属ではPrandtl数が小さく $P_r \ll 1$ の仮定がよい近似で成立する。これは熱伝導が良いため、速度境界層よりも温度境界層が厚く、熱は運動量よりも速やかに拡散することを表している。

(c) 磁気Prandtl数 $P_m < 1$ の仮定

Prandtl数と同様に磁気Prandtl数は

$$P_m \equiv \frac{\nu}{\nu_m}$$

で定義される。ここで $\nu_m = \frac{1}{\sigma \mu}$ は磁気粘性係数である。磁気境界層の厚さ δ_m は誘導方程式より

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} \sim \nu_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad \therefore \frac{UB}{L} \sim \nu_m \frac{B}{\delta_m^2}$$

と評価できる。よって拡散係数の比の平方根は境界層の厚さの比に比例し

$$\sqrt{\frac{\nu}{\nu_m}} \sim \frac{\delta_v}{\delta_m}$$

となる。電気伝導度のよい溶融金属でも、透磁率 μ が極めて小さいため、磁気粘性係数は大きく磁場は拡散しやすい。よって溶融金属の磁気Prandtl数は一般に小さく、 $P_m < 1$ の仮定が成立する。これは速度境界層の厚さに比べて磁気境

界層の厚さがより厚く、磁場の拡散が運動量の拡散よりも早いことを意味している (図14参照)。

$$\boxed{P_m < 1} \quad P_m = \frac{\nu}{\nu_m} \quad \text{磁気Prandtl数}$$

$$\boxed{P_r < 1} \quad P_r = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Prandtl数}$$

$$\sqrt{P_m} = \sqrt{\frac{\nu}{\nu_m}} \sim \frac{\delta_v}{\delta_m} \quad \delta_v < \delta_m, \text{ 磁気境界層厚い}$$

$$\sqrt{P_r} = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}} \sim \frac{\delta_v}{\delta_T} \quad \delta_v < \delta_T, \text{ 磁度境界層厚い}$$

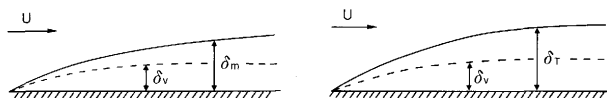


図14 磁気境界層 δ_m ・温度境界層 δ_T ・速度境界層 δ_v

(d) Schmidt数

Prandtl数と同様にSchmidt数は

$$S_c = \frac{\nu}{D}$$

で定義される。ここでDは質量拡散係数である。温度境界層と濃度境界層の対応を表37に示しておく。

表37 温度境界層と濃度境界層

$$\boxed{P_r < 1} \quad P_r = \frac{\nu}{\alpha} : \text{Prandtl数}$$

$$\boxed{S_c < 1} \quad S_c = \frac{\nu}{D} : \text{Schmidt数}$$

$$\text{速度境界層}\delta_v < \text{温度境界層}\delta_T \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T$$

$$\text{速度境界層}\delta_v < \text{濃度境界層}\delta_D \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = \frac{1}{Re Sc} \nabla^2 C$$

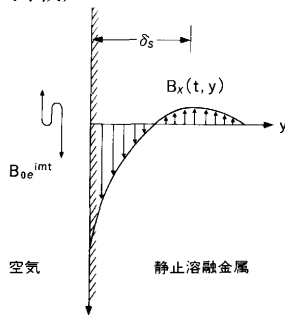
例題 4 磁場の拡散

磁気Reynolds数が小さい場合、磁場の移流拡散方程式は移流項が省略でき

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B}$$

と近似できる。この方程式は線形方程式であるので、磁場が調和振動する場合、複素表示を用いて容易に解くことができる。付図2の静止熔融金属の表面で交流磁界 B_{oe}^{int} が与えられた場合、熔融金属内部の磁束密度、電流密度、表皮厚さ、電磁圧、Joule発熱、Poyntingベクトルを求めよ。

(解答は6章末に掲載)



付図2 磁場の拡散

6 基礎方程式の性質

基礎方程式を解かなくても基礎方程式からいろいろな性質を調べることができる。ここではMaxwellの応力テンソルから導かれる場の性質およびLorentz力から導かれる電磁力の多様な性質について調べる。また運動方程式から導かれる電磁流体のBernoulliの定理やうず運動等についても考察する。この章の内容は以下の通りである。

6・1 Maxwellの応力テンソル

6・2 Lorentz力

6・3 運動の方程式

6・1 Maxwellの応力テンソル

(i) Maxwellの応力テンソルの力学的な意味

磁場のMaxwellの応力テンソルは

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{B}\mathbf{H} - p_{em} \mathbf{I}$$

(張力) (圧縮力)

で与えられる。 $\mathbf{B}$ を磁力線方向とそれに垂直な断面の方向に分解すれば $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$ と書ける。 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 、 $p_{em} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ の場合について考える。Maxwellの応力テンソルを成分表示すれば

$$\mathbf{T}_m = \frac{B^2}{\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - p_{em} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{B^2}{2\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

張力 圧縮力 張力と圧縮力

となる。すなわち、磁力線方向に $\frac{B^2}{\mu}$ の張力が働き、すべての方向から磁気圧力 $p_{em} = \frac{B^2}{2\mu}$ で圧縮力を受ける。この2つの力を合成すると、磁力線方向に $\frac{B^2}{2\mu}$ の張力が作用し、それに垂直な方向から $\frac{B^2}{2\mu}$ の圧縮力が作用することになる (図15参照)。すなわち磁力線はあたかもゴムひもがまわりから磁気圧力を受けながら引き伸ばされたような状態になっている (図16参照)。

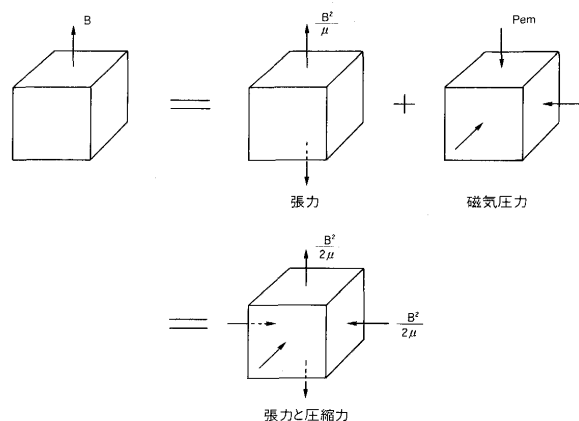


図15 Maxwellの応力テンソルの力学的な意味

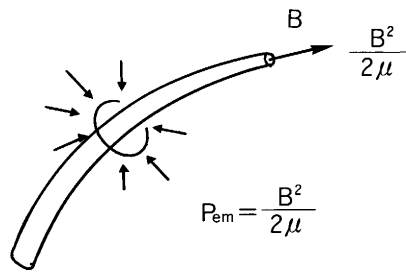


図16 磁気圧力を受けるゴムひも

(ii) 磁束管の力学的性質

 磁場を表すMaxwellの応力テンソルは $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ のとき

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{B}\mathbf{H} - \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{B^2}{2\mu} \mathbf{I}$$

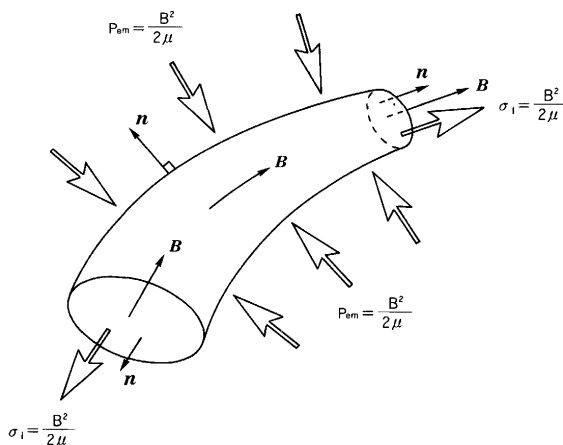
と表せる。このMaxwellの応力テンソルの力学的意味は磁束管 (magnetic flux tube) の力学的性質として表すことができる。磁束管の断面に働く応力は、断面の単位法線ベクトルをMaxwellの応力テンソルに2回内積することにより

$$\sigma_1 = \frac{B^2}{2\mu} \quad \dots\dots \text{張力}$$

と求まる。すなわち、磁束管の断面には $B^2/2\mu$ だけの張力が作用している。一方磁束管の壁面の単位法線ベクトルは磁束密度に垂直で $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ を満足する。Maxwellの応力テンソルにこの側壁方向の単位法線ベクトルを内積すると、側壁面に作用する応力が

$$\sigma_2 = -\frac{B^2}{2\mu} \quad \dots\dots \text{圧縮力}$$

と求まる。すなわち、磁束管は圧力 $p_{em} = \frac{B^2}{2\mu}$ によって圧縮されている。以上より磁場を表すMaxwellの応力テンソルの性質は図17のような磁束管の力学的性質として記述することができる。


 図17 磁束管の力学的性質 (軸方向に σ_1 の張力、側壁面に p_{em} の圧縮力が作用する。

(iii) 応力ベクトルの表示

磁場のMaxwellの応力テンソルは

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{B}\mathbf{H} - \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\mathbf{I}$$

である。ここで $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 、 $\mathbf{H} = H\mathbf{i}$ とする (図18参照)。すなわち、磁場の方向を x 軸の方向と一致させる。このとき、面の単位法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

応力ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(n)} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_m \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})\mathbf{H} - \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\mathbf{n} \\ &= \mu H \cos \theta (H\mathbf{i}) - \frac{\mu}{2} H^2 (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \\ \therefore \mathbf{t}^{(n)} &= \frac{\mu}{2} H^2 \cos \theta \mathbf{i} - \frac{\mu}{2} H^2 \sin \theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

と表せる。これより、応力ベクトルの成分は

$$t_x = \frac{\mu}{2} H^2 \cos \theta, \quad t_y = -\frac{\mu}{2} H^2 \sin \theta$$

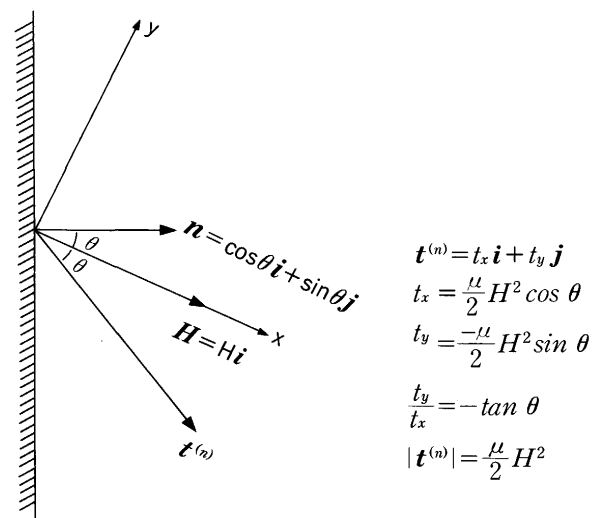
となる。よって応力ベクトルが x 軸となす角は

$$\frac{t_y}{t_x} = -\tan \theta$$

となる。また応力ベクトルの大きさは一定で

$$|\mathbf{t}^{(n)}| = \frac{\mu}{2} H^2$$

である。面の方向は x 軸から回転してゆくと、応力ベクトルの方向は逆回転して図19のようになる。すなわち $\theta = 0$ で張力、 $\theta = \pi/4$ でせん断応力、 $\theta = \pi/2$ で圧縮力、 $\theta = 3\pi/4$ でせん断応力、 $\theta = \pi$ で張力となる。


 図18 応力ベクトル $\mathbf{t}^{(n)}$

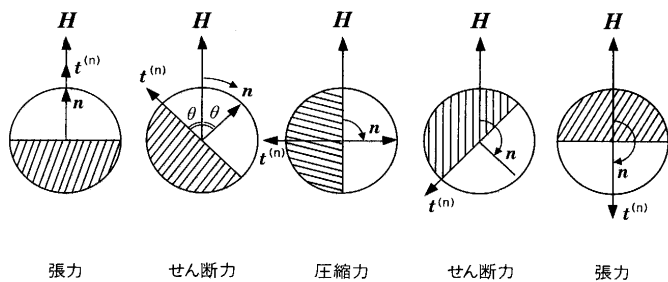


図19 物体表面に働く応力ベクトル $\mathbf{t}^{(n)}$ ($|\mathbf{t}^{(n)}| = \frac{\mu}{2} H^2$)
(応力ベクトル $\mathbf{t}^{(n)}$ と単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は互に逆方向に回転し、その回転角は等しい)

6・2 Lorentz力

(i) Lorentz力の解釈

電磁流体に作用する Lorentz力は近似的に

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} \approx \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0$$

で与えられる。すなわち誘導磁場が無視できるならば $\mathbf{B}$ は印加磁場 $\mathbf{B}_0$ で近似できる。この Lorentz力は Ohmの法則と Ampereの法則を用いてつぎのように解釈できる。

(a) Ohmの法則

Ohmの法則を用いると Lorentz力は

$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \sigma (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) - v B^2$ となる。流れの方向 $\mathbf{v}$ と電界ベクトル $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は一般に直交する。(1)によって $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ はそのベクトルの向きによって流れを加速する(電磁ポンプ)ことも流れを減速する(電磁ブレーキ)こともできる。(2)流れの方向に対して印加磁場は直交するので $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \approx 0$ である。(3)最後の項は B^2 に比例して流体の流れを減速する方向に働く。

(b) Ampereの法則

Ampereの法則を用いると Lorentz力は

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu} \right)$$

(1) 非保存力 (2) 保存力

と変形できる。(1). 右辺第1項の回転は零でない。よって非保存力となる。この力によってうず運動を制御することができる。(2). 右辺第2項の回転は零である。よって保存力となる。そして保存力はうず運動に無関係である。

(ii) Lorentz力の多様性

Lorentz力は簡単に $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ と書けるが実にいろいろな場合を含んでいる。まず印加電流があるかないかが問題である。印加電流がある場合にはそれが直流であるか交流であるかを区別する必要がある。磁場については表38のように固定磁場か移動磁場か、交流磁場か直流磁場か、回転磁場か進行磁場かに分類される。これらの組合せによっていろいろな装置が作られている。

表38 磁場の多様性

磁場	固定磁場	直流磁場
		交流磁場
	移動磁場	進行磁場
		回転磁場

(iii) Lorentz力の回転

印加磁場に比較して誘導磁場が小さいとき、電流と Lorentz力は

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)$$

$$\mathbf{f}^L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0$$

と近似できる。直流磁場の場合 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ である。よって、電流と Lorentz力の回転は電気伝導度 σ を一定として

$$\nabla \times \mathbf{j} = \sigma [(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0]$$

$$\nabla \times \mathbf{f}^L = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{j} - (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0$$

と変形できる。ここで各項の物理的な意味を考えてみる。

(a) $(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}$

$\mathbf{B}_0$ 方向の速度こう配に起因する電流のうず度成分である。そして、流れ方向に軸を持つうず電流を形成する(図20参照)。たとえば図20において速度分布が $\mathbf{v} = v(x, y) \mathbf{k}$ 、印加磁場が $\mathbf{B}_0 = B_0(z) \mathbf{i}$ ならば $(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} = B_0 \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{k}$ となる。よって $B_0 \frac{\partial v}{\partial x} > 0$ のとき $\nabla \times \mathbf{j}$ の方向は流れの方向と一致し、 $B_0 \frac{\partial v}{\partial x} < 0$ のとき流れと逆方向となる。その結果、xy断面の中央部は流体が減速され、y軸に平行な壁面近傍の流体は加速される(図22参照)。y軸方向の速度こう配 $\frac{\partial v}{\partial y}$ は電流のうず度成分に寄与しない。

(b) $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0$

流れ方向の磁場こう配に起因する電流のうず度成分である。すなわち、図20の場合

$$\nabla \times \mathbf{j} = \sigma (B_0 \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{k} - v \frac{\partial B_0}{\partial x} \mathbf{i})$$

であるから、 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B}_0 = v \frac{\partial B_0}{\partial z} \mathbf{i}$ となる。よってうず電流の軸は $\mathbf{B}_0$ に平行で、磁場のこう配 $\frac{\partial B_0}{\partial z}$ の正負によってその軸の方向は逆転する(図21参照)。図20と図21を総合するとダクト内のうず電流分布は図22のようになる。

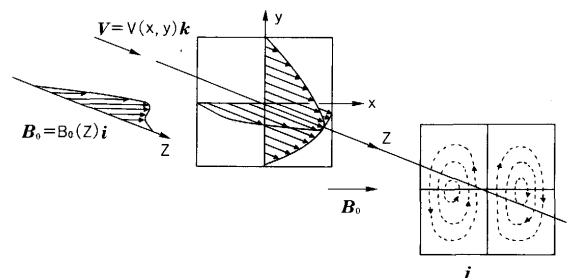


図20 $(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}$ による電流 $\nabla \times \mathbf{j} = \sigma (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} = \sigma B_0 \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{k}$

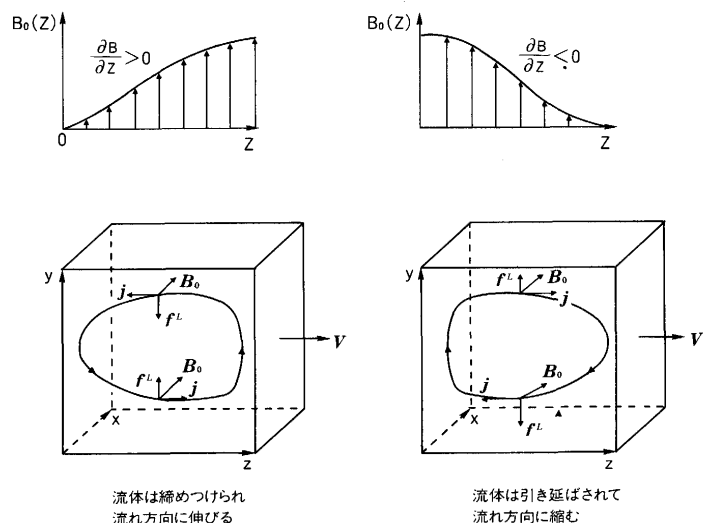


図21 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0$ によるうず電流 $\nabla \times \mathbf{j} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 = -v \frac{\partial B_0}{\partial Z} \mathbf{i}$

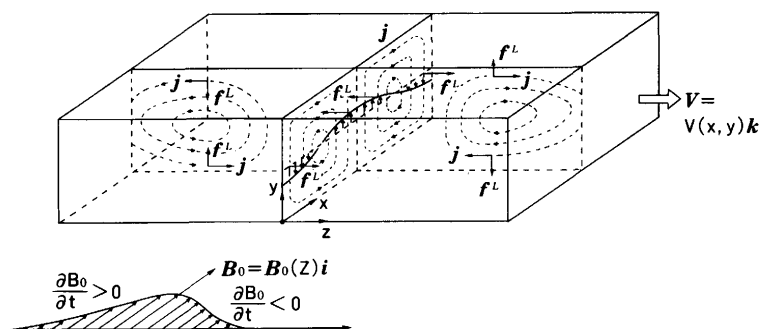


図22 ダクト内のうず電流分布 $\mathbf{j}$ と流体に作用する電磁力 $\mathbf{f}^L$

(c) $(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{j}$

磁束密度の方向に電流分布があるとうず運動が発生する (図23参照)。

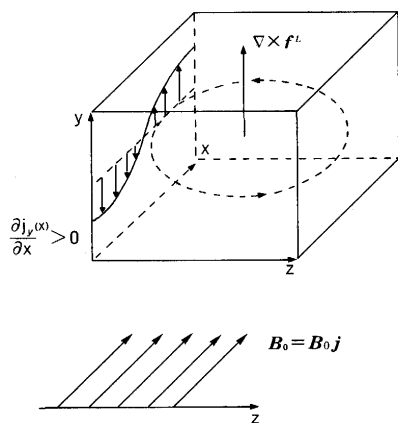


図23 磁場方向に電流分布がある場合のうず運動 (xz 面内) $(\nabla \times \mathbf{f}^L)_y = [(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{j}]_y = B_0 \frac{\partial j_y(x)}{\partial x}$

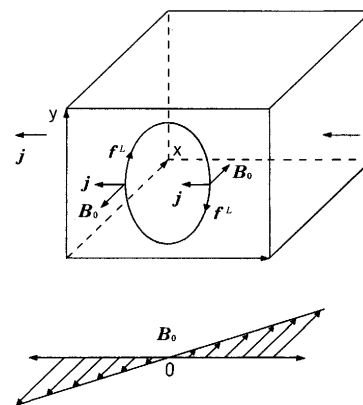


図24 電流方向に磁場分布がある場合のうず運動 (yz 面内)

$$\nabla \times \mathbf{f}^L = -(\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 = -j_z \frac{\partial B_0}{\partial z} \mathbf{i}$$

(d) $(\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0$

電流方向に磁束密度の分布があるとうず運動が発生する (図24参照)。

6・3 運動の方程式

(i) 回転形表示

重力ポテンシャルを Ω として Bernoulli 関数を

$$H = \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega$$

で定義する。このとき運動の方程式は回転形で

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla H + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho \mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

と表せる。

(ii) Bernoulli の定理

流れは定常で、流体の粘性は無視できるものとする。また磁束密度の方向に磁場が変化しないものとする。このとき回転形の運動方程式は

$$\nabla \left(H + \frac{B^2}{2\rho\mu} \right) = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

と変形できる。よって Bernoulli 面上で

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega + \frac{B^2}{2\rho\mu} = \text{const.}$$

が成立する。これが MHD に対する Bernoulli の定理である。これより「速度と重力ポテンシャルの和が一定ならば、圧力は磁場の強さの 2 乗に比例して低下する」ことがわかる。

(iii) うず運動

流体の粘性が無視できるとき、回転形の運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\nabla H + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{em}$$

と書ける。ここで $\mathbf{f}_{em} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ である。よって循環輸送の定理を用いると

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_m(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{C_m(t)} \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{em} \cdot d\mathbf{x}$$

が導かれる。これは《速度の循環の増加率は電磁力による仕事に等しい》ことを表している。また、運動方程式の回転をとると

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{em} \right)$$

となる。ここで流束輸送の定理を用いると、

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{C_m(t)} \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{em} \cdot d\mathbf{x}$$

が導かれる。ただし、右辺はstokesの定理を用いて面積分が線積分に変換されている。これは《面を通過する全うず度の増加率が電磁力による仕事に等しい》ことを表している。

一方うず度方程式は連続の方程式を用いると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) - \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{em} \right)$$

と変形できる。この運動方程式は積分できて、解は

$$J\omega_j = \left\{ \omega_k^0 + \int_0^t \frac{\rho_0}{\rho} \left[\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{em} \right) \right]_i \frac{\partial X_k}{\partial x_i} dt \right\} \frac{\partial x_j}{\partial X_k}$$

と表せる。ただし、 $\rho_0 = \rho J$ 、 X_k は物質座標、 x_i は空間座標である。連続体の力学(4) (棚橋 1989) 参照。これは《電磁力によってうず度が生成される過程》を表している。電磁力がない場合

$$J\omega_j = \omega_k^0 \frac{\partial x_j}{\partial X_k}$$

となる。これは《時刻=0にうず度がないならば $\omega_k^0=0$ であるから、永久にうずは生じない》ことを表している。すなわちLagrangeのうず定理が成立する。

例題3の解答

この恒等式はベクトルGreenの第2公式を用いて導かれる。よってまずベクトルGreenの第2公式を導く。スカラーGreenの第2公式は

$$\iiint_T (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \iint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

と書ける。この公式はスカラー関数 φ と ψ に関する展開公式

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) = \varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi$$

より導かれる。これに対応するベクトルGreenの第2公式はベクトル関数 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{F}$ に関する展開公式

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F})$$

を体積分することにより得られる。その結果は

$$\iiint_T (\mathbf{E} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla^2 \mathbf{E}) dV = \iint_S [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})(\nabla \cdot \mathbf{E})] dS - \iint_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E})] dS$$

となる。ここで $\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}$ を用いた。つぎにこのベクトルGreenの第2公式を用いてベクトル恒等

式を導く。 $\mathbf{I}$ を恒等テンソルとする。 $\mathbf{E} = \varphi \mathbf{I}$ で φ がHelmholtz方程式

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$$

の基本解で

$$\varphi = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

ならば

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \varphi \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \varphi \times \mathbf{I} = \mathbf{I} \times \nabla \varphi \\ \nabla^2 \mathbf{E} &= \nabla^2 \varphi \mathbf{I}, \quad \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -\delta \mathbf{I} \end{aligned}$$

が成立する。この結果を用いてベクトルGreenの第2公式の各項を計算する。まず右辺の体積分は

$$\iiint_V (\mathbf{E} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla^2 \mathbf{E}) dV = \iiint_V (\varphi \nabla^2 \mathbf{F} - \mathbf{F} k^2 \varphi) dV + \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) \quad (a)$$

となる。また右辺の各面積の初項は体積分に変換でき

$$\begin{aligned} &\iint_S [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{F})] \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_S [\varphi \mathbf{I}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \varphi \mathbf{I} \times (\nabla \times \mathbf{F})] \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_V [\nabla(\varphi \nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\varphi \nabla \times \mathbf{F})] \cdot d\mathbf{V} \\ &= \iint_V [\nabla \cdot \mathbf{F} + (\nabla \times \mathbf{F}) \times] \nabla \varphi dV + \iint_V \varphi \nabla^2 \mathbf{F} dV \quad (b) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}$ を用いた。さらに、右辺の各面積分の第2項の和は

$$\begin{aligned} &\iint_S [\mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{E})] \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_S [\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \times] \nabla \varphi dS \quad (c) \end{aligned}$$

となる。(a)、(b)、(c)よりベクトル恒等式

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) + \iint_V k^2 \varphi \mathbf{F} dV &= \iint_V [\nabla \cdot \mathbf{F} + (\nabla \times \mathbf{F}) \times] \nabla \varphi dV \\ &\quad - \iint_S [\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \times] \nabla \varphi dS \end{aligned}$$

が導ける。 $k=0$ のとき φ はLaplaceの方程式の基本解となる(証明終わり)。このベクトル恒等式は応用価値が高いにもかかわらず、一般の数学公式集には見かけないようである(Stratton 1941参照)。

例題4の解答

磁場は x 方向成分のみが存在し $\mathbf{B} = (B_x(t, y), 0, 0)$ と書ける。よって誘導方程式の成分表示は

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu} \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}$$

となる。境界条件は

$$\begin{aligned} B_x &= 0, & y &= +\infty \text{のとき} \\ B_x &= B_0 e^{i\omega t}, & y &= 0 \text{のとき} \end{aligned}$$

である。

解法：解は複素表示

$$B_x = f(y)e^{i\omega t}$$

の実部として求まる。これを誘導方程式の成分表示式に代入して、 $f(y)$ に関する常微分方程式

$$i\omega\sigma\mu f = \frac{d^2f}{dy^2}$$

が得られる。この方程式の境界条件は

$$\begin{aligned} f &= 0, & y &= +\infty \text{のとき} \\ f &= B_0, & y &= 0 \text{のとき} \end{aligned}$$

である。この境界条件を満足する解は

$$f(y) = B_0 e^{-\lambda y}$$

で与えられる。ただし

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{i\omega\sigma\mu} = e^{\frac{\pi}{4}i} \sqrt{\omega\sigma\mu} = (1+i)k \\ k &= \sqrt{\omega\sigma\mu/2} \end{aligned}$$

である。

磁束密度：磁束密度は複素表示

$$B_x = B_0 e^{-\lambda y} e^{i\omega t}$$

の実部として

$$R_e(B_x) = B_0 e^{-ky} \cos(\omega t - ky)$$

と求まる。

電流密度：Ampereの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$ の成分表示よりスカラー方程式

$$-\frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu j_z$$

が導かれる。よって電流密度の複素表示

$$j_z = \frac{\lambda}{\mu} B_0 e^{-\lambda y} e^{i\omega t}$$

が求まる。よって求めるべき電流密度は

$$R_e(j_z) = \sqrt{\frac{\omega\sigma}{\mu}} B_0 e^{-ky} \cos(\omega t - ky - \frac{\pi}{4})$$

と表せる。

表皮厚さ：y軸の正方向に向って B_x と j_z は指数関数的に減少する。表皮厚さ δ_s は表面の値の1/eに減衰する距離で定義される。よって $y = \delta_s$ のとき $k\delta_s = 1$ となる。すなわち、表皮厚さは

$$\delta_s = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

で与えられる。これは代表長さをLとして

$$\frac{\delta_s}{L} \sim \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\nu_m}{\omega}} = \frac{1}{W_m}$$

を意味する。ただし $\nu_m = \frac{1}{\sigma\mu}$ 、 W_m は磁気Womersley数である。

電磁圧：溶融金属の表面に働く電磁圧は単位体積あたりに働く電磁力の積分として求まる。電磁力はLorentz力で $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ である。いま、1周期Tにわたっての時間平均値を

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f dt$$

で表せば、電磁力はy方向のみに作用し

$$\langle f_y \rangle = \langle j_z B_x \rangle = \frac{1}{2} R_e(j_z B_x^*)$$

で求まる。ここで B^* はBの共役複素数である。よって電磁力は

$$\langle f_y \rangle = \frac{k}{2\mu} B_0^2 e^{-2ky}$$

と表せる。電磁力の減衰は早く、電磁力は表面に集中する。単位表面積あたりに作用する電磁圧 p_{em} は電磁力の積分として

$$p_{em} = \int_0^\infty \langle f_y \rangle dy = \frac{B_0^2}{4\mu}$$

と求まる。最大値 B_0 と実効値 B_e の関係は $\sqrt{2} B_e = B_0$ であるから

$$p_{em} = \frac{B_e^2}{2\mu}$$

と書くこともできる。すなわち、交流磁場の磁気圧は実効を用いて表した直流磁場の磁気圧に等しい。

Joule発熱：単位体積あたりのJoule発熱量は

$$q = \left\langle \frac{j_z^2}{\sigma} \right\rangle = \frac{1}{2\sigma} R_e(j_z j_z^*) = \frac{\omega}{2\mu} B_0^2 e^{-2ky}$$

と求まる。よって単位表面積あたりの全発熱量は

$$Q = \int_0^\infty q dy = \frac{\omega B_0^2}{4k\mu}$$

で表せる。

Poyntingベクトル： $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ で与えられるPoyntingベクトルは単位面積あたりの電磁エネルギー流束を表している。Ohmの法則と $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ を用いると $\mathbf{P} = \frac{1}{\sigma\mu} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ となる。よってこの時間平均値は

$$\langle P_y \rangle = \frac{1}{\sigma\mu} \langle j_z B_x \rangle = \frac{1}{2\sigma\mu} R_e(j_z B_x^*) = \frac{k B_0^2}{2\sigma\mu^2} e^{-2ky}$$

となる。ところが、関係式

$$k = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

が成立するので $y = 0$ でのPoyntingベクトルの値は、

$$\langle P_y \rangle_{y=0} = Q$$

を満足する。すなわち、電磁エネルギーの投入量はすべてJoule発熱となって熱エネルギーに変換される。また周波数が高い場合Joule発熱も溶融金属の表面に集中することがわかる。