

電磁熱流体力学の基礎と応用 (I)

棚橋隆彦

Takahiko TANAHASHI

Theory and Application of Thermo-Magneto Hydro Dynamics (I)



慶応義塾大学理工学部教授
棚橋 隆彦

1941年1月24日生
1964年 慶応義塾大学工学部機械工学科卒業
1969年 工学博士 (慶応義塾大学)
1970年 カリフォルニア工科大学 (C. I. T.) の客員研究員
1985年 慶応義塾大学理工学部教授
1986年 サザンプトン大学の客員教授
1987年 マサチューセッツ工科大学 (M. I. T.) の客員教授
現在 慶応義塾大学理工学部教授

1 まえがき

ここで述べることは電磁熱流体力学の基礎と数値解析手法を含めたその応用である。講義形式でわかり易くという事であるので、その主旨に沿ってまとめてみることにした。これからこの分野を学ぼうとしている人々にとって、少しでも参考になれば幸いである。

相互作用：電磁熱流体力学の基礎は、その文字が示すように電磁気学と熱力学と流体力学の3分野が融合した学問である。そして流体と熱、流体と電磁気、熱と電磁気が互に相互作用する非常に興味ある学問分野であると同時に、エネルギー科学の核となっている。図1にその相互関係を示す。

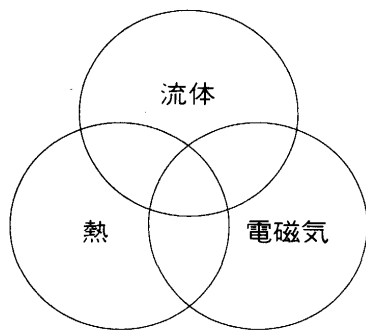


図1 流体・熱・電磁気の相互関係

電磁流体力学の分類：電磁流体力学は大きく分けて4つの分野よりなっている (図2 参照)。(i) プラズマ (plasma) は圧縮性のある電磁流体力学で核融合・熱プラズマ・溶接工学等がその応用分野である。さらに電磁空気力学は太陽・星・地球磁気の成因を研究する天体物理学として、また人工衛星やロケットの打ち上げおよび大気への再突入の際に発生する高温電離気体を研究する航空宇宙物理学として発展している。(ii) MHD (magneto hydro dynamics) はおもに非圧縮の導伝性のある電磁流体力学である。水銀・ナトリウム・溶融金属の流れが電磁場によってどのように制御できるを研究する学問である。超電導船やコールド・クルーシブルの研究もこの分野に属する。(iii) FHD (ferro hydro

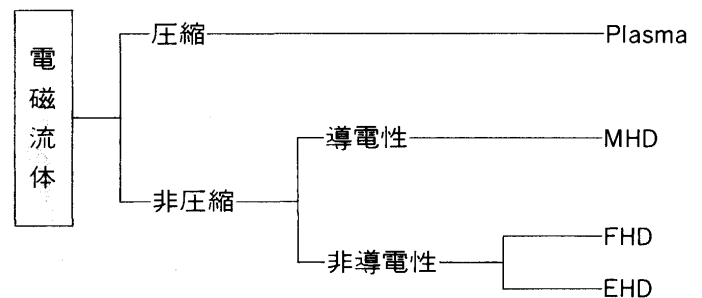


図2 電磁流体力学の分類

平成4年1月16日受付 平成4年9月4日受理 (Received on Jan. 16, 1992; Accepted on Sep. 4, 1992) (依頼講義)

* Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi Kohoku-ku Yokohama 223

* Key words: MHD (magneto hydro dynamics); plasma; magnetic fluid; liquid metal; FEM (finite element method); CFD (computational fluid dynamics); thermo fluid; theory of micropolar fluid.

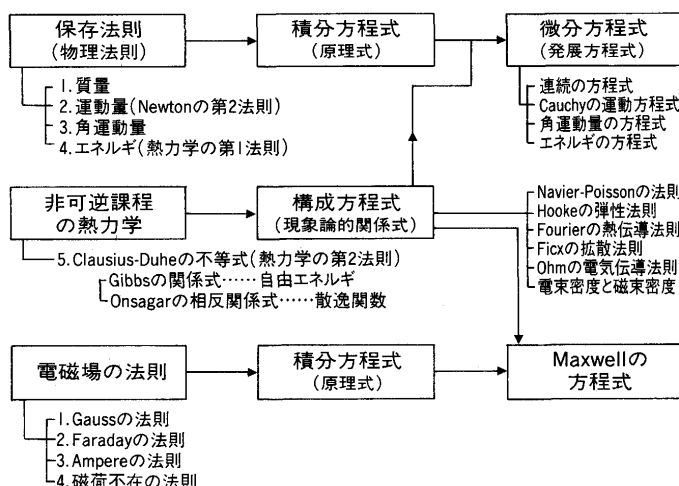


図3 連続体の力学における基本法則と定式化

dynamics) は、ふつう磁性流体力学とよばれる。磁性流体 (magnetic fluid) とは、液体中に粒子径約10nm程度のマグネタイトなどの強磁性体の微粒子を数密度約 10^{23} 個/ m^3 で分散させた安定な懸濁液である。この人工的な多機能流体は現在いろいろな分野への応用が期待されている。(iv)EHD (electro hydro dynamics) は、電気粘性流体力学の省略形である。電気粘性流体はER流体 (electro rheological fluid) とよばれ、磁性流体と同様に人工的な多機能流体である。特に自動車のクラッチへの応用が期待されている。磁性流体と電気粘性流体は液体内部に微粒子が分散し、内部角運動量を持つマイクロ・ポーラ電磁流体である。

基本物理法則：上に述べた4つの分野の電磁流体力学はマイクロ・ポーラ電磁流体力学として統一される。その基本物理法則は全部で9個である (図3参照)。すなわち、質量・運動量・角運動量・エネルギーの4つの物理量に対する保存法則 (つり合い方程式) と熱力学の第2法則および電磁場を支配する4つの法則 (Gaussの法則・Faradayの法則・Ampere法則・磁荷不在の法則) から構成されている。これらの法則は、固体の力学や電磁構造動力学にも共通で連続体の力学における基本法則として知られている。

定式化：定式化には2通りの方法がある。その1つは固定検査体積 V を用いる定式化で、Euler表示とよばれる。他の1つは物質検査体積 $V_m(t)$ を用いる定式化でLagrange表示とよばれる。Euler表示とLagrange表示を結びつけるのがReynoldsの輸送定理である。積分形のつり合い方程式はGaussの定理とCauchyの基本定理を用いることによって、微分形の発展方程式となる (図4参照)。微分形の発展方程式は速度場・圧力場・温度場・電磁場を解くための多次元連立偏微分方程式系となる。対称性のある簡単な問題は速度 $\mathbf{w}$ で任意に運動する検査体積 $V_a(t)$ での積分形つり合い方程式を利用するのがよい。また複雑な問題には各物理量に初期条件と境界条件を与え、多次元連立偏微分方程式系を差分法・有限体積法・有限要素法等で離散化し、スーパー・コンピュータを用いて解くのが普通である。

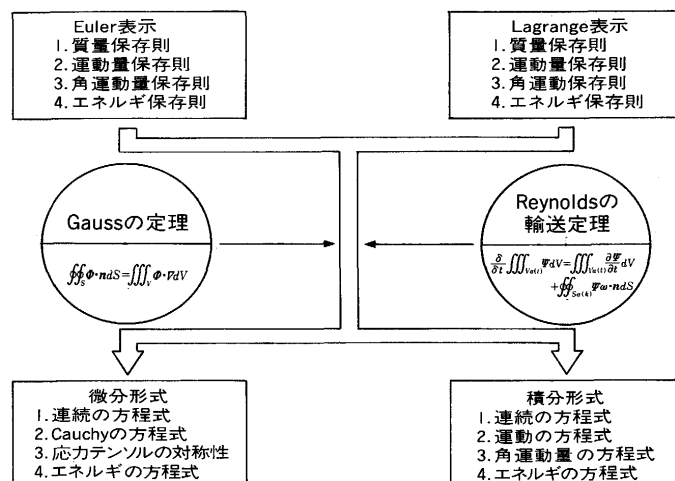


図4 保存則の表示 (Euler表示とLagrange表示)

講義内容：本講義内容は上記の手順を具体化することにある。そして以下の項目よりなる。

- (I) 1. まえがき
 2. 基礎定理
 - 2・1 輸送定理
 - 2・2 積分定理
 - 2・3 Cauchyの基本定理
 3. 電磁熱流体力学の基礎方程式 (一般論)
 - 3・1 流れ場の基礎方程式
 - 3・2 電磁場の基礎方程式
 - 3・3 流れ場と電磁場の連成
 4. 構成方程式
 - 4・1 構成方程式の保存部分
 - 4・2 構式方程式の散逸部分
 - 4・3 基礎方程式の具体的表示

(Vol. 79 No. 2に掲載)
 - (II) 5. MHDの基礎方程式 (特殊論)
 - 5・1 電磁流体力学の仮定
 - 5・2 MHDの基礎方程式
 - 5・3 うず電流の解析
 - 5・4 境界条件
 - 5・5 自由表面の境界条件
 - 5・6 無次元数
 - 5・7 無次元数と方程式の近似
 6. 基礎方程式の性質
 - 6・1 Maxwellの応力テンソル
 - 6・2 Lorentz力
 - 6・3 運動の方程式

(Vol. 79 No. 4に掲載)
 - (III) 7. GSMAC-FEMによる数値解析
 - 7・1 数値解析の手法
 - 7・2 GSMAC法
 - 7・3 GSMAC法による電磁流体の解析
 - 7・4 GSMAC法による電磁熱流体の解析
 - 7・5 空間の離散化と係数行列
 - 7・6 計算例
 8. むすび
 - 参考文献
- (Vol. 79 No. 5に掲載)

2 基礎定理

第2章では保存則を表現するのに必要な基礎定理を学ぶ。輸送定理は動座標系でのLagrange表示と静止座標系でのEuler表示を結びつけるものである。積分定理は体積分と面積分の変換および面積分と線積分の変換を表すものである。Cauchyの基本定理は応力ベクトルと応力テンソルの間の関係式である。これらの定理は第3章への準備である。

この章の内容は以下のとおりである。

2・1 輸送定理

2・2 積分定理

2・3 Cauchyの基本定理

2・1 輸送定理

物質体積分・物質面積分・物質線積分に関する3つの輸送定理がある。物質体積分に関するものをReynolds輸送定理・物質面積分に関するものを流束の輸送定理・物質線積分に関するものを循環の輸送定理とよぶ。輸送定理は積分形のつり合い表示式を微分形つり合い表示式に変換するのに用いられる。証明は連続体の力学(2) (棚橋1991) に詳しくされている。

(i) Reynoldsの輸送定理

物質体積分に関する物質時間微分はReynoldsの輸送定理とよばれ、任意の物理量 f に対して

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} f dV = \iiint_{V_m(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) \right] dV$$

と表せる。特に物理量 f として密度 ρ を選べば、質量の保存則によりこの式の左辺は零となる。よって右辺より連続の方程式が導かれる。

(ii) 流束の輸送定理

物質面積分に関する物質時間微分は流束の輸送定理とよばれ、任意のベクトル量 $\mathbf{a}$ に対して

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_m(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \right] \cdot \mathbf{n} dS$$

と表せる。特に $\mathbf{a}$ としてうず度ベクトルを選べば、加速度の回転が零のときHelmholtzのうず定理が導かれる。また $\mathbf{a}$ として磁束密度 $\mathbf{B}$ を選べば、運動中の媒質に対するFaradayの電磁誘導の法則が導かれる。

(iii) 循環の輸送定理

物質線積分に関する物質時間微分は循環の輸送定理とよばれ、任意のベクトル量 $\mathbf{a}$ に対して

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_m(t)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_m(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v} \right] \cdot d\mathbf{r}$$

と表せる。特に $\mathbf{a}$ として速度ベクトル $\mathbf{v}$ を選べば、加速度の回転が零のときKelvinのうず定理が導かれる。

(iv) 保存則の等価表現

質量の保存則・流束の保存則・循環の保存則はそれぞれ、Reynoldsの輸送定理・流束の輸送定理・循環の輸送定理より

導かれる。それらをまとめると表1のごとくなる。積分形の保存則を微分形に直すと表2が得られる。

表1 輸送定理と保存の法則

Reynoldsの輸送定理	質量保存の法則	$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \rho dV = 0$
流束の輸送定理	Helmholtzのうず定理	$\frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0$
循環の輸送定理	Kelvinのうず定理	$\frac{d}{dt} \oint_{C_m(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$

表2 積分形と微分形の保存則

	積分形	微分形
質量輸送に伴う ρ の保存	$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \rho dV = 0$	$\frac{d\rho}{dt} = 0$ または $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{v}) = 0$
質量の保存	$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \rho dV = 0$	$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0$
流束の保存	$\frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = 0$	$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} = 0$ または、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{a}}{\rho} \right) = \frac{\mathbf{a}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v}$
循環の保存	$\frac{d}{dt} \oint_{C_m(t)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} = 0$	$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v} = 0$

例題1 Helmholtzのうず定理

加速度の回転が零ならば、うず管の強さは運動中不変である。このHelmholtzのうず定理を流束の輸送定理を用いて証明しなさい。(解答は4章末に掲載)

2・2 積分定理

後に用いられる3つの積分定理をまとめておく。それらはGreenの定理・Gaussの定理・Stokesの定理である。詳しい証明は連続体の力学(6) (棚橋1988) を参照。

(i) Greenの定理

面積分を体積分に変換するGreenの定理は

$$\iint_S f n_i dS = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV$$

と書ける。このGreenの定理において、 $i=1, 2, 3$ と書いて各方向の和をとれば

$$\iint_S f \mathbf{n} dS = \iiint_V \text{grad } f dV$$

が導かれる。これをこう配定理 (gradient theorem) という。

(ii) Gaussの定理

Greenの定理において $f=v_i$ として i について総和をとると、Gaussの定理

$$\iint_S v_i n_i dS = \iiint_V v_{i,i} dV$$

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{v} dV$$

を得る。Gaussの定理は発散定理 (divergence theorem) ともよばれる。 $\mathbf{v}$ が流束を意味するとき、 $Q = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ は閉曲面 S を通して流出する流量を意味する。すなわち流出流量は単位体積あたりの発散量 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ の総和に等しい。

(iii) Stokesの定理

線積分を面積分に変換するStokesの定理は

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

と書かれる。このStokesの定理は2次元のGreenの定理より導かれる。

(iv) Gaussの定理とStokesの定理の一般化

Gaussの定理とStokesの定理およびその拡張はすべて

$$\begin{aligned} \iint_S d\mathbf{S} * \boldsymbol{\phi} &= \iiint_V dV \nabla * \boldsymbol{\phi} & (dS_i = dV \partial_i) \\ \oint_C d\mathbf{r} * \boldsymbol{\phi} &= \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla * \boldsymbol{\phi} & (dr_i = e_{ijk} dS_j \partial_k) \end{aligned}$$

の形に書きかえることができる。よって記号の置換

$$\begin{aligned} dS &\rightarrow dV \nabla, \text{ 面積分} \rightarrow \text{体積分, Gaussの定理} \\ d\mathbf{r} &\rightarrow d\mathbf{S} \times \nabla, \text{ 線積分} \rightarrow \text{面積分, Stokesの定理} \end{aligned}$$

によって積分変換を記憶しておくといよい。 $*\boldsymbol{\phi}$ は変換後も同じである。ここで $\boldsymbol{\phi}$ はスカラー、ベクトル、テンソルのいずれの量でもよい。また積の記号 $*$ もStar積とよばれ、スカラー積、ベクトル積、テンソル積のいずれかである。

このとき、面積分を体積分に変換する一般化されたGaussの定理 (generalized Gauss' theorem) は、

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{n} * \boldsymbol{\phi} dS &= \iiint_V \nabla * \boldsymbol{\phi} dV \\ \text{または,} \\ \iint_S \boldsymbol{\phi} * \mathbf{n} dS &= \iiint_V \boldsymbol{\phi} * \nabla dV \end{aligned}$$

であり、面積分を線積分に変換する一般化されたStokesの定理 (generalized Stokes' theorem) は、

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) * \boldsymbol{\phi} dS &= \oint_C \mathbf{t} * \boldsymbol{\phi} ds \\ \text{または,} \\ -\iint_S \boldsymbol{\phi} * (\nabla \times \mathbf{n}) dS &= \oint_C \boldsymbol{\phi} * \mathbf{t} ds \end{aligned}$$

である。ここで、 $\oint$ は閉曲線を、 $\iint$ は閉曲面を意味する。さらに $\mathbf{n}$ は面の外向き単位法線ベクトルであり、 $\mathbf{t}$ は閉曲線Cの単位接線ベクトルである (図5)。

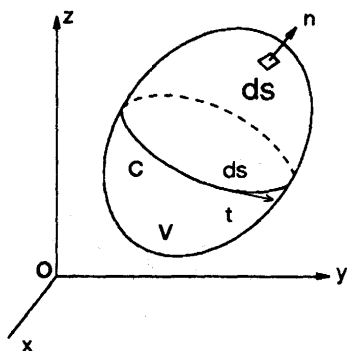


図5 積分変換

2・3 Cauchyの基本定理

Cauchyの基本定理は応力ベクトル $\mathbf{t}^{(n)}$ と応力テンソル $\mathbf{T}$ を結びつける定理で

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$$

と書ける。ここで $\mathbf{n}$ は面の単位法線ベクトルである。同様に偶応力ベクトル $\boldsymbol{\lambda}^{(n)}$ は偶応力テンソル $\mathbf{A}$ を用いて

$$\boldsymbol{\lambda}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$$

と書ける。Gaussの定理を用いると左辺の面積分は発散の体積分に変換できる。例えば

$$\begin{aligned} \iint_{S_m(t)} \mathbf{t}^{(n)} dS &= \iint_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS = \iiint_{V_m(t)} \nabla \cdot \mathbf{T} dV \\ \iint_{S_m(t)} \boldsymbol{\lambda}^{(n)} dS &= \iint_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS = \iiint_{V_m(t)} \nabla \cdot \mathbf{A} dV \end{aligned}$$

となる。

3 電磁熱流体の基礎方程式 (一般論)

第3章ではいろいろな仮定をせず、一般的に成立する基礎方程式を誘導する。MHDの基礎方程式は一般論の特別な場合として第5章で述べる。流れ場の基礎方程式は質量・運動量・角運動量・エネルギーのつり合いを表すものである。電磁場の基礎方程式はGaussの法則・Faradayの電磁誘導の法則・修正Ampereの法則・磁荷不在の法則より誘導される。そして電磁力・電磁トルク・電磁エネルギーの消滅は力学的な力・トルク・エネルギーに変換される。そして系全体としてこれらの物理量が保存される。

この章の内容はつぎの通りである。

- 3・1 流れ場の基礎方程式
- 3・2 電磁場の基礎方程式
- 3・3 流れ場と電磁場の連成

この章に対して棚橋・岡永 (1989) と棚橋・井門 (1991) の2つの論文が参考になる。

3・1 流れ場の基礎方程式

(i) 質量保存則

流動する連続体の中に物質検査面 $S_m(t)$ を考える。この物質検査面 $S_m(t)$ によって囲まれた検査体積 $V_m(t)$ の中の質量は保存される。よって、質量保存則は

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \rho dV = 0$$

と表示できる。ここで、 ρ は流体の密度である。物質検査体積の時間微分に関するReynoldsの輸送定理とGaussの発散定理を用いることにより、積分形の質量保存則は微分形で

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

と記述できる。この式を連続の方程式とよぶ。

(ii) 運動量のつり合い式

Newtonの運動に関する第2法則によれば、閉じた系内の

運動量の時間的変化率は系に作用する面積力と体積力の総和に等しい。この運動量に関する法則は

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} (\rho \mathbf{v} + \mathbf{g}) dV = \iint_{S_m(t)} \mathbf{t}^{(n)} dS + \iiint_{V_m(t)} \rho \mathbf{b} dV$$

と記述できる。ここで、 $\rho \mathbf{v}$ は流体の単位体積あたりの運動量であり、 $\mathbf{g}$ は電磁運動量ベクトルである。 $\mathbf{t}^{(n)}$ は単位面積あたりに働く力、すなわち応力ベクトルである。応力ベクトルはCauchyの基本定理を用いると $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ と書ける。流体と電磁場が相互に作用する場合、この応力テンソルは

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em} + \nu \mathbf{g}$$

と書かれる。 $\mathbf{T}_0$ は電磁場が作用しない場合の流体の応力テンソルであり、 $\mathbf{T}_{em}$ は電磁場のMaxwellの応力テンソルである。 $\nu \mathbf{g}$ は検査面が運動することによる電磁運動量 $\mathbf{g}$ の輸送を表している。 $\mathbf{b}$ は単位質量に作用する外力である。左辺にReynoldsの輸送定理を適用し、物質時間微分と体積分の順序を交換する。右辺の面積分にGaussの積分定理を適用し、面積分を体積分に変換する。任意の体積要素 $V_m(t)$ に対して成立することを考慮すれば、運動量に関する微分式

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em}) + \rho \mathbf{b}$$

が導ける。これはCauchyの運動方程式の電磁場が作用する場合への拡張である。ここでの応力テンソルは任意で、非線形であっても反対称成分を持っていたりよい。

(iii) 角運動量のつり合い式

角運動量の法則は、閉じた系内の角運動量の時間的変化率が面積力のモーメントと体積力のモーメントの総和に等しいことを表している。よって、角運動量のつり合い式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} [\mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v} + \mathbf{g}) + \rho \mathbf{s}] dV \\ = \iint_{S_m(t)} (\mathbf{r} \times \mathbf{t}^{(n)} + \lambda^{(n)}) dS + \iiint_{V_m(t)} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} + \rho \mathbf{l}) dV \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{s}$ は単位質量あたりのスピン角運動量、 $\lambda^{(n)}$ は面積偶力、偶応力テンソル $\mathbf{\Lambda}$ を用いるとCauchyの基本定理より $\lambda^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Lambda}$ と表される。 $\mathbf{l}$ は単位質量あたりの体積偶力である。Reynoldsの輸送定理を用いて左辺の物質時間微分と体積分の順序を交換する。右辺の面積分をGaussの発散定理を用いて体積分に変換する。すべての項が体積分で表された後、積分記号を除くと

$$\mathbf{r} \times \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right) + \rho \frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\nabla \cdot \{ (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em}) \times \mathbf{r} \} + \nabla \cdot \mathbf{\Lambda} + \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} + \rho \mathbf{l}$$

なる式が導かれる。つぎに、運動量の方程式を用いて並進角運動量を消去すると、マイクロ・ポーラ電磁流体に対する微分形の角運動量方程式

$$\rho \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{\Lambda} + \rho \mathbf{l} + \mathbf{e} : (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em})$$

が導かれる。ここで、 $\mathbf{e}$ は3階の交代テンソルである。この結果、応力テンソルの反対称成分のみが角運動量に寄与す

る。そして、とくに無極性流体の場合、スピンなし、偶応力なし、体積偶力なしとなる

$$\mathbf{e} : (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em}) = 0$$

が導かれる。電磁場の作用がない場合、 $\mathbf{e} : \mathbf{T}_0 = 0$ となる。すなわち、無極性流体の応力テンソル $\mathbf{T}_0$ は対称である。応力テンソルが対称ならば $\mathbf{e} : \mathbf{T}_{em} = 0$ が得られる。よって、Maxwellの応力テンソルも対称になる。すなわち、電界ベクトル $\mathbf{E}$ と電気分極ベクトル $\mathbf{P}$ 、および磁界ベクトル $\mathbf{H}$ と磁気分極ベクトル $\mathbf{P}_m$ (磁化ベクトル $\mathbf{M}$) がそれぞれ平行になる。しかし、磁性流体や電気粘性流体のようなマイクロ・ポーラ電磁流体に対しては $\mathbf{E} \parallel \mathbf{P}$, $\mathbf{H} \parallel \mathbf{P}_m$ とはならない。

(iv) エネルギーのつり合い方程式

熱力学の第1法則はエネルギー保存の法則である。すなわち、閉じた系の全エネルギーの時間的変化率は力のなした仕事と系に供給されるエネルギーの総和に等しい。このエネルギー保存則は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} + \frac{\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{2} \right) dV = \iint_{S_m(t)} (\mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{v} + \lambda^{(n)} \cdot \boldsymbol{\Omega}) dS + \\ \iiint_{V_m(t)} (\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\Omega}) dV - \iint_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{E}' \times \mathbf{H}') dS + \iiint_{V_m(t)} \rho r dV \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 u は電磁場の作用下におけるマイクロ・ポーラ電磁流体の全内部エネルギーである。またスピン・ベクトル $\mathbf{s}$ は角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の線形関数であるから、粒子の回転エネルギーは $\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\Omega} / 2$ となる。 $\mathbf{q}$ は熱流束ベクトル、 $\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'$ は動座標系におけるPoyntingベクトルで電磁放射エネルギーを表している。 r は単位質量あたりの熱源の強さである。Reynoldsの輸送定理とGaussの発散定理を利用し、すべての項を体積分で表した後、積分記号を除く。その結果、

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} + \frac{\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{2} \right) = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \nabla \cdot [(\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em} + \nu \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v}] \\ + \nabla \cdot (\mathbf{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{E}' \times \mathbf{H}') + \rho r \end{aligned}$$

なる式が導かれる。つぎに運動量の方程式と角運動量の方程式を用いて、運動エネルギーとスピンの回転エネルギーを消去する。整理するとその結果、

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} = (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em}) : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \\ - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{E}' \times \mathbf{H}') + \nabla \cdot (\nu \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e} : (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em}) + \rho r \end{aligned}$$

なるエネルギー式が導かれる。この式はかなり複雑である。このエネルギー式を簡明にするために相対論的な電磁気学が必要となる。以上の結果を表3にまとめておく。

表3 つり合い方程式

	つり合い方程式
質 量	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
運 動 量	$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{T}_{em}) + \rho \mathbf{b}$
角運動量	$\rho \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \rho \mathbf{l} + \mathbf{e} : (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em})$
エネルギー	$\rho \frac{du}{dt} = (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em}) : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{A} : \nabla \Omega + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{E}' \times \mathbf{H}') + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e} : (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em}) + \rho r$

例題2 Cauchyの運動方程式

物質に電磁場が作用しているとき、Cauchyの運動方程式は

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em}) + \rho \mathbf{b}$$

となることを証明しなさい。ただし、 ρ は密度・ $\mathbf{v}$ は速度ベクトル・ $\mathbf{g}$ は電磁運動量ベクトル・ $\mathbf{T}_0$ は電磁場が作用していないときの応力テンソル・ $\mathbf{T}_{em}$ はMaxwellの応力テンソル・ $\mathbf{b}$ は単位質量あたりの外力である。(解答は4章末に掲載)

3・2 電磁場の基礎方程式

一般に電磁流体の速度 $\mathbf{v}$ は光速 c に比較して小さいから $(\mathbf{v}/c)^2 \ll 1$ が成立する。このとき、Lorentzの係数 γ は1に等しい。電磁気学の諸法則はLorentz変換のもとで厳密に不変であるが、ここではGalilei変換のもとで成り立つ近似理論について考える。すなわち、相対論的変換式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} & \mathbf{D}' &= \mathbf{D} \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D} & \mathbf{E}' &= \mathbf{E} \\ \mathbf{j}' &= \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{E} & \rho_e' &= \rho_e \end{aligned}$$

が成立する範囲で考える。とくに電束密度・磁束密度・電荷密度は $(\mathbf{v}/c)^2 \ll 1$ のもとで不変である。このとき、つぎの電磁法則が成立つ。

(i) Gaussの法則

Gaussの法則は、検査面を通過する電束の総和が内部にある電荷の総和に等しいことを述べている。これを動座標系で記述すると

$$\oint_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} dS = \iiint_{V_m(t)} \rho_e dV$$

となる。Gaussの積分定理を用いると、これより微分形のGaussの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$$

が導ける。

(ii) Faradayの電磁誘導の法則

Faradayの電磁誘導の法則は、閉回路に生ずる起電力の大きさが、その閉回路の中を通過する磁束密度の減少率に等

しいことを述べている。これを動座標系で記述すると

$$\oint_{C_m(t)} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = - \frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。左辺にStokesの定理を適用し線積分を面積分に変換する。右辺に流束の輸送定理を適用し、物質時間微分を

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \equiv \iint_{S_m(t)} \left(\frac{D\mathbf{B}}{Dt} \right) \cdot \mathbf{n} dS$$

で定義する。このとき物質時間微分に関してつぎの関係式

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v}$$

が成立する。よって、微分形のFaradayの電磁誘導の法則は

$$\nabla \times \mathbf{E}' = - \frac{D\mathbf{B}}{Dt}$$

と表される。

(iii) Ampere-Maxwellの法則

Ampere-Maxwellの法則は、磁界中の閉曲線に沿っての線積分がその閉曲線内を通過する全電流に等しいことを述べている。よって、Ampere-Maxwellの法則は動座標系で

$$\oint_{C_m(t)} \mathbf{H}' \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_m(t)} \mathbf{j}' \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \iint_{S_m(t)} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS$$

と記述できる。右辺第2項は変位電流を表している。これより微分形のAmpereの法則

$$\nabla \times \mathbf{H}' = \mathbf{j}' + \frac{D\mathbf{D}}{Dt}$$

が導かれる。ここで、磁束密度の物質時間微分と同様に関係式

$$\frac{D\mathbf{D}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{D}) \mathbf{v}$$

が成立する。

(iv) 磁荷不在の法則

磁荷不在の法則は、磁力線が途中で切れないことを表している。すなわち、磁力線は連続である。この法則は

$$\oint_{S_m(t)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

と記述できる。Gaussの定理を適用すると微分形の式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

が導かれる。微分形のMaxwellの方程式の相対論的表示を表4にまとめておく。

表4 動座標系でのMaxwellの方程式

法 則	動座標系でのMaxwellの方程式
Gaussの法則	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$
Faradayの電磁誘導の法則	$\nabla \times \mathbf{E}' = - \frac{D\mathbf{B}}{Dt}$
Ampere Maxwellの法則	$\nabla \times \mathbf{H}' = \mathbf{j}' + \frac{D\mathbf{D}}{Dt}$
Gaussの法則	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

ここで、比較のために、静止座標系での電磁場の法則の積分形を表5に、微分形を図6にまとめておく。

表5 静止座標系での電磁場の法則

Gaussの法則
$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \rho_e dV$
Faradayの電磁誘導の法則
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$
Ampere-Maxwellの法則
$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS$
磁束密度の保存則
$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$

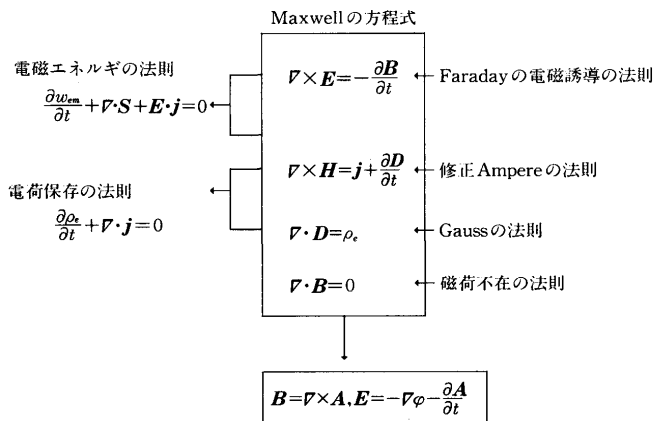


図6 Maxwellの方程式と基本電磁法則

(v) 電荷保存の法則

電荷保存の法則はGaussの法則と修正Ampereの法則より導かれる法則で

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

と書ける。

(vi) 電磁エネルギーの法則

電磁エネルギーの法則はFaradayの電磁誘導の法則と修正Ampereの法則より導かれ

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = 0$$

と書ける。ここで

$$w_{em} = \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

は電磁エネルギーであり

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

はPoyntingベクトルである。そしてPoyntingベクトルは電磁エネルギー流束を意味する。

(VII) $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ と Joule 熱

電磁エネルギーのバランスに現れる $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ は Ohm の法則により2つの場合がある。

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \text{ ならば } \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= \frac{j^2}{\sigma} = Q_{em} \\ \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \text{ ならば } \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \\ &= Q_{em} + \mathbf{f}^L \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\mathbf{f}^L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ は Lorentz 力である。すなわち静止している導体ならば $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ は Joule 熱 Q_{em} に等しく、導体が速度 $\mathbf{v}$ で運動している場合は、Joule 熱 Q_{em} と Lorentz 力のなした仕事の和に等しい。すなわち

$$\begin{aligned} \text{静止導体} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= Q_{em} \\ \text{動く導体} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= Q_{em} + \mathbf{f}^L \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

となる。

3・3 流れ場と電磁場の連成

(i) 電磁力・電磁トルク・電磁エネルギー

流体と電磁場の相互作用を別の立場から検討してみる。流体に作用する電磁力 $\mathbf{f}_{em}$ 、流体に作用する電磁トルク ℓ_{em} 、電磁エネルギーの消滅 w_{em} はそれぞれ

$$\mathbf{f}_{em} = \nabla \cdot \mathbf{T}_{em} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \quad \text{力}$$

$$\ell_{em} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}_{em} + \mathbf{e} : \mathbf{T}_{em} \quad \text{トルク}$$

$$w_{em} = \mathbf{f}_{em} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' \quad \text{エネルギー}$$

で与えられる。ここで $\mathbf{e}$ (または ε と書く) は3階の交代テンソルである。これらの式は力・トルク・エネルギーの力学的なものとは電磁気的なものの変換を表している。電磁エネルギーの消滅は電磁力のなす仕事 $\mathbf{f}_{em} \cdot \mathbf{v}$ と Joule 熱 $Q_{em} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}'$ からなる。前者は回復エネルギーであり後者は消散エネルギーである。

(ii) Maxwellの応力テンソル

ここではMaxwellの応力テンソルと電磁圧力について調べる。微分形の方程式の具体的表示を得るには電磁運動量ベクトル、Maxwellの応力テンソルの具体的表示を代入しなければならない。しかしながら、マイクロ・ポーラ電磁流体と電磁場が相互に作用する場合、いまだに定説がないのが現状である。物質内での電磁運動量ベクトルとMaxwellの応力テンソルの表示として、ここでは

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{D} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{T}_{em} &= \mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H} - p_{em} \mathbf{I} \end{aligned}$$

を採用する。ここで、 p_{em} は電磁圧力で、

$$p_{em} = \int_0^E \left(\frac{\partial(v\mathbf{D})}{\partial v} \right)_{T,E,H} \cdot d\mathbf{E} + \int_0^B \left(\frac{\partial(v\mathbf{B})}{\partial v} \right)_{T,E,H} \cdot d\mathbf{H}$$

である。 $v = 1/\rho$ は比体積である。これが物質中でのMaxwellの応力テンソルの正しい表示であることは熱力学的に証明される。これに類似する考え方はLandau-Lifshitz (1976)

やRosensweig (1985) の中にもある。このとき、応力テンソルは

$$\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}^s + \mathbf{T}^a + \mathbf{DE} + \mathbf{BH}$$

と書ける。ここで

$$p = p_0 + p_{em}, \quad \mathbf{T}_0 = -p_0\mathbf{I} + \mathbf{T}^s + \mathbf{T}^a$$

である。pは電磁場の作用下における熱力学的圧力である。そして $\mathbf{T}^s$ は粘性応力テンソルの対称部分、 $\mathbf{T}^a$ は粘性応力テンソルの反対称部分である。極性効果がない電磁流体では $\mathbf{T}^a = 0$ となる。圧力についての取り扱いは特に注意を要する。なぜならば真空中の電磁圧（単位体積あたりのエネルギー）は物質の運動になんら寄与しないからである。すなわち、計器で測定できる圧力は全圧力pより真空中の電磁圧 $p_{em}^{(0)}$ を差し引いたものである。よって実際に流体・運動に寄与する圧力は

$$p - p_{em}^{(0)} = p_0 + p_{em}^{(1)}$$

と表せる。ここで電磁圧力 p_{em} は真空中の電磁圧力 $p_{em}^{(0)}$ と残差圧力 $p_{em}^{(1)}$ の和として

$$p_{em} = p_{em}^{(0)} + p_{em}^{(1)}$$

と書ける。ただし

$$p_{em}^{(0)} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\mu_0}{2} H^2$$

$$p_{em}^{(1)} = \int_0^E \left(\frac{\partial(v\mathbf{P})}{\partial v} \right)_{T,E,H} \cdot d\mathbf{E} + \int_0^H \left(\frac{\partial(v\mathbf{P}_m)}{\partial v} \right)_{T,E,H} \cdot d\mathbf{H}$$

である。ここで、 $\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$ μ_0 は真空の透磁率、 $\mathbf{M}$ は磁化ベクトルである。このとき電磁力は

$$\mathbf{f}_{em} = \rho_e \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + (\mathbf{P}_m \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{P}_m \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \nabla p_{em}^{(1)}$$

となる。特に電気分極や磁気分極が起らないと $\mathbf{P} = 0$ 、 $\mathbf{P}_m = 0$ である。よって電磁力はLorentz力のみで

$$\mathbf{f}_{em} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

となる。

(iii) 電磁気学の恒等式

ここでは3つの電磁気学の恒等式を誘導する。

(a) Poyntingベクトルに関する恒等式

静止座標系でPoyntingベクトルの発散は電磁エネルギーの関係式

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

を満足する。これに対する動座標系での表示を求める。相対論的Maxwellの方程式を用いると、動座標系のPoyntingベクトルの発散は

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}') = -\mathbf{E}' \cdot \frac{D\mathbf{D}}{Dt} - \mathbf{H}' \cdot \frac{D\mathbf{B}}{Dt} - \mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}'$$

と表せる。ここで、流束の輸送に関する物質時間微分の定義式および電磁運動量ベクトルを $\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ として、ベクトル解析の公式より導かれる式

$$\nabla \cdot (\mathbf{vg} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を用いると、動座標系のPoyntingベクトルの発散はつぎの恒等式

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{vg} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{DE} + \mathbf{BH}) : \nabla \mathbf{v}$$

$$= \nabla \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}') + \mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}' + \rho \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{D}}{\rho} \right) + \mathbf{H} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) \right\}$$

を満足する。この恒等式は、後にエネルギー方程式を簡単にするとき、およびGibbsの関係式を導くときに用いられる。

(b) 電磁エネルギーと電磁エクセルギに関する恒等式

電磁エネルギー w_{em} と電磁エクセルギ（電磁コエネルギーともいう） $\hat{w}_{em}$ をそれぞれ

$$w_{em} = \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

$$\hat{w}_{em} = \int_0^E \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E} + \int_0^H \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}$$

で定義する。このとき和は

$$w_{em} + \hat{w}_{em} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

を満足する。よって、電磁エネルギーと電磁エクセルギは恒等式

$$\frac{dw_{em}}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v})(w_{em} + \hat{w}_{em}) = \rho \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{D}}{\rho} \right) + \mathbf{H} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) \right\}$$

を満足する。

(c) Poyntingベクトルと電磁エネルギーの恒等式

Poyntingベクトルに関する恒等式と電磁エネルギーに関する恒等式を用いて、Poyntingベクトルと電磁エネルギーに関するつぎの恒等式

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{vg} \cdot \mathbf{v}] - \nabla \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}')$$

$$= \mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}' + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{w_{em}}{\rho} \right) + [\hat{w}_{em} \mathbf{I} - (\mathbf{DE} + \mathbf{BH})] : \nabla \mathbf{v}$$

が導ける。これらの3つの恒等式は、マイクロ・ポーラ電磁流体と電磁場の相互作用を研究するうえでとくに重要な役割を演ずる。表6に電磁気学の3個の恒等式をまとめておく。

表6 電磁気学の恒等式

Poynting ベクトルと Joule熱	$\nabla \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}') = -\mathbf{E}' \cdot \frac{D\mathbf{D}}{Dt} - \mathbf{H}' \cdot \frac{DB}{Dt} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}'$ $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{DE} + \mathbf{BH}) : \nabla \mathbf{v}$ $= \nabla \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}') + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' + \rho \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{D}}{\rho} \right) + \mathbf{H} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) \right\}$
電磁エネルギーと 電磁エクセルギ	$w_{em} + \hat{w}_{em} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ $\frac{dw_{em}}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v})(w_{em} + \hat{w}_{em})$ $= \rho \left\{ \mathbf{E} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{D}}{\rho} \right) + \mathbf{H} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) \right\}$
Poynting ベクトルと 電磁エネルギー	$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot [\mathbf{v} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}] - \nabla \cdot (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}')$ $= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{w_{em}}{\rho} \right) + [w_{em} \mathbf{I} - (\mathbf{DE} + \mathbf{BH})] : \nabla \mathbf{v}$

4 構成方程式

構成方程式は一般に保存部分と散逸部分の和として記述できる。保存部分は熱力学の第1法則を用いてHelmholtzの自由エネルギーより導かれる。一方散逸部分は熱力学の第2法則を用いて散逸関数より導かれる。そして構成方程式は物質の性質を表すものであるから、標構無差別性の原理を満足する。この章では構成方程式の求め方を示す。

この章の内容はつぎのとおりである。

- 4・1 構成方程式の保存部分
- 4・2 構成方程式の散逸部分
- 4・3 基礎方程式の具体的表示

4・1 構成方程式の回復部分

ここでは構成方程式の保存部分について調べる。

(i) Gibbsの関係式

マイクロ・ポーラ電磁流体に対するGibbsの関係式は

$$du = Tds - pd \left(\frac{1}{\rho} \right) + \mathbf{E} \cdot d \left(\frac{\mathbf{D}}{\rho} \right) + \mathbf{H} \cdot d \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right)$$

である。この結果は無極性電磁流体に対するTarapov(1972)の結果とも一致している。

(ii) Helmholtzの自由エネルギー

Helmholtzの自由エネルギーを

$$f = u - Ts$$

で定義する。その後Legendre変換

$$\tilde{f} = f - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) / \rho$$

を行い独立変数の変換を行う。その結果、熱力学のポテンシャルの全微分は

$$d\tilde{f} = -sdT - pd \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{\mathbf{D}}{\rho} \cdot d\mathbf{E} - \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot d\mathbf{H}$$

となる。これは、熱力学のポテンシャル $\tilde{f}$ が4個の独立変数 $T, \rho, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ を持つことを意味し、エントロピー、熱力学的压力、電束密度、磁束密度が

$$s = - \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial T} \right)$$

$$p = \rho^2 \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} \right)$$

$$\mathbf{D} = - \rho \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{E}} \right)$$

$$\mathbf{B} = - \rho \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{H}} \right)$$

と定義できることを表している。ここで、電束密度と磁束密度の構成方程式は

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m$$

である。これは、熱力学ポテンシャル $\tilde{f}$ が電磁エクセルギ $\hat{w}_{em}$ を用いて

$$\tilde{f} = \tilde{f}_0 - \hat{w}_{em} / \rho$$

と書けることを表している。ここで、 $\tilde{f}_0$ は電磁場が作用していないときの自由エネルギーである。さらに、内部エネルギーは自由エネルギーの定義式より

$$u = f + Ts$$

と求まる。そして、エンタルピーの定義式は

$$h = u + p/\rho$$

で与えられる。

(iii) 熱力学の諸量

一般に熱力学の諸量は、電磁場が作用していないときの量と電磁場が作用したために生ずる量との和として表せる。すなわち、

$$s = s_0 + s_{em}$$

$$p = p_0 + p_{em}$$

$$u = u_0 + u_{em}$$

$$h = h_0 + h_{em}$$

となる。これより、電磁場が作用したために生ずる諸量が陽的に厳密な形で求まる。そして、これらの式はさらに

$$s_{em} = s_{em}^{(i)}$$

$$p_{em} = \hat{w}_{em} + p_{em}^{(i)}$$

$$u_{em} = w_{em} / \rho + u_{em}^{(i)}$$

$$h_{em} = \frac{1}{\rho} (w_{em} + \hat{w}_{em}) + h_{em}^{(i)}$$

と書くこともできる。ここで、 $s_{em}^{(i)}$ 、 $p_{em}^{(i)}$ 、 $u_{em}^{(i)}$ 、 $h_{em}^{(i)}$ は電気分極ベクトルと磁気分極ベクトルが密度と温度に依存

表7 マイクロ・ポーラ電磁流体の熱力学

Gibbsの関係式	$du = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \mathbf{E} \cdot d\left(\frac{\mathbf{D}}{\rho}\right) + \mathbf{H} \cdot d\left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\right)$
エントロピ	$s = -\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial T}\right)_{\rho, \mathbf{E}, \mathbf{H}}$
熱力学的圧力	$p = \rho^2 \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\right)_{T, \mathbf{E}, \mathbf{H}}$
電束密度	$\mathbf{D} = -\rho \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T, \rho, \mathbf{H}}$
磁束密度	$\mathbf{B} = -\rho \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{H}}\right)_{T, \rho, \mathbf{E}}$

表8 熱力学的諸量の分解

エントロピ	$s = s_0 + s^{em} = s_0 + s_{em}^{(i)}$
熱力学的圧力	$p = p_0 + p^{em} = p_0 + \hat{w}_{em}^{(i)} + p_{em}^{(i)}$
内部エネルギー	$u = u_0 + u_{em} = u_0 + \frac{w_{em}}{\rho} + u_{em}^{(i)}$
エンタルピ	$h = h_0 + h_{em} = h_0 + \frac{1}{\rho}(w_{em} + \hat{w}_{em}) + h_{em}^{(i)}$

するために生ずる項である。

マイクロ・ポーラ電磁流体の熱力学的結果と熱力学的諸量の分解を表7と表8にまとめておく。

4・2 構成方程式の散逸部分

ここでは構成方程式の散逸部分について調べる。

(i) 散逸関数

散逸関数は構成方程式の非保存部分を決定するために用いられる。これには熱力学の第2法則が用いられる。熱力学の第2法則は、閉じた系内のエントロピの増加率が単位時間あたりの流入エントロピに等しいかまたはそれより大きいことを述べている。この法則はClausius-Duhemの不等式として、

$$\iiint_{V_m(t)} \rho \frac{ds}{dt} dV \geq \iiint_{V_m(t)} \frac{\rho r}{T} dV - \oint_{S_m(t)} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} dS$$

と記述できる。この不等式の微分形は

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{\rho r}{T} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right)$$

と書ける。エネルギーの方程式をエントロピで表示すると

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \Phi_v + \Phi_{em}$$

となる。ここで、 Φ_v は粘性による散逸関数、 Φ_{em} は電磁エネルギーの散逸関数で

$$\begin{aligned} \Phi_v &= \mathbf{T}^s : \mathbf{d} + (\mathbf{w} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{e} : \mathbf{T}^a + \Lambda : \nabla \boldsymbol{\Omega} \\ \Phi_{em} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' \end{aligned}$$

である。ここで、 $\mathbf{d}$ は変形速度テンソル、 $\mathbf{w}$ は流体の角速度ベクトルである。 Φ_v の右辺第1項、第2項、第3項はそれぞれ流体のせん断粘性、うず粘性、スピン粘性によるエネ

ルギ散逸を表している。そして、熱力学の第2法則を表す不等式

$$\Phi_v + \Phi_{em} + \Phi_{th} \geq 0$$

が得られる。ただし、熱流束にもとづく散逸関数は

$$\Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q}}{T^2} \cdot \nabla T$$

である。

(ii) 構成方程式の散逸部分

散逸関数が決定できると、最大散逸速度の原理を用いて構成方程式の散逸部分が決定できる。一般に、熱力学の第2法則より導かれる全散逸関数の不等式は（結合過程の場合）粘性部分と電磁部分と熱部分がそれぞれ独立の不等式として

$$\Phi_v \geq 0, \quad \Phi_{em} \geq 0, \quad \Phi_{th} \geq 0$$

が成立することが知られている。また、非可逆熱力学における平衡状態のごく近くでOnsagarの相反関係式が成立するものとする。そして、非線形な複合過程を無視し、線形な結合過程のみを考える。このとき、係数を適当に選べば、粘性散逸関数 Φ_v より

$$\mathbf{T}^s = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_v}{\partial \mathbf{d}} = \lambda (\text{tr } \mathbf{d}) \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{d}$$

$$\mathbf{T}^a = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_v}{\partial [\mathbf{e} \cdot (\mathbf{w} - \boldsymbol{\Omega})]} = 2\mu_1 \mathbf{e} \cdot (\mathbf{w} - \boldsymbol{\Omega})$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_v}{\partial (\nabla \boldsymbol{\Omega})} = \alpha (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{I} + \beta \nabla \boldsymbol{\Omega} + \gamma (\nabla \boldsymbol{\Omega})'$$

が求まる。ここで λ は第2粘性係数、 η はせん断粘性係数、 μ_1 はうず粘性係数、 α 、 β 、 γ はスピン粘性係数である。第1式はNavier-Poissonの法則を意味し、第2式と第3式はEringen(1976)の結果と一致する。つぎに電磁エネルギーの散逸関数 Φ_{em} について考える。

散逸関数 Φ_{em} はJoule熱を表し

$$\mathbf{j}' = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{em}}{\partial \mathbf{E}'} = \sigma \mathbf{E}'$$

となる。ここで σ は電気伝導度で、最後の式はOhmの法則を表している。

最後に、熱の散逸関数 Φ_{th} について考える。散逸関数 Φ_{th} より

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{th}}{\partial (\nabla T)} = -k \nabla T$$

を得る。ここで、 k は熱伝導率である。そして、この式はFourierの法則を表している。以上の構成方程式を代入すると散逸関数はそれぞれ

$$\Phi_v = \lambda (\text{tr } \mathbf{d})^2 + 2\eta \mathbf{d} : \mathbf{d} + 4\mu_1 (\mathbf{w} - \boldsymbol{\Omega})^2 + \alpha (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega})^2 + \beta \nabla \boldsymbol{\Omega} : \nabla \boldsymbol{\Omega} + \gamma \nabla \boldsymbol{\Omega} : (\nabla \boldsymbol{\Omega})'$$

$$\Phi_{em} = \mathbf{j}'^2 / \sigma$$

$$\Phi_{th} = k \frac{(\nabla T)^2}{T^2}$$

表9 自由エネルギーと散逸関数

自由エネルギー	$\bar{f} = u - Ts$ $\bar{f} = f - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) / \rho$ $\bar{f} = \bar{f}_0 - \frac{1}{\rho} \left[\int_0^E \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E} + \int_0^H \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \right]$
散逸関数	$\Phi_e = \mathbf{T}^S : \mathbf{d} + (\mathbf{w} - \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{e} : \mathbf{T}^a + \Delta : \nabla \mathbf{Q}$ $= \lambda (\text{tr} \mathbf{d})^2 + 2\eta \mathbf{d} : \mathbf{d} + 4\mu_1 (\mathbf{w} - \mathbf{Q})^2$ $+ \alpha (\nabla \cdot \mathbf{Q})^2 + \beta \nabla \mathbf{Q} : \nabla \mathbf{Q} + \gamma \nabla \mathbf{Q} : (\nabla \mathbf{Q})^t$ $\Phi_{em} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' = \mathbf{j}^2 / \sigma$ $\Phi_{th} = -\frac{q}{T^2} \cdot \nabla T = k \frac{(\nabla T)^2}{T^2}$

表10 構成方程式

極性流体	$\mathbf{T}^S = \lambda (\text{tr} \mathbf{d}) \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{d}$ $\mathbf{T}^a = 2\mu_1 \mathbf{e} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{Q})$ $\Delta = \alpha (\nabla \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{I} + \beta \nabla \mathbf{Q} + \gamma (\nabla \mathbf{Q})^t$
電流密度	$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$
熱流束	$\mathbf{q} = -k \nabla T$

と求まる。

表9に自由エネルギーと散逸関数を、表10にそれから得られる構成方程式をまとめておく。

4・3 基礎方程式の具体的表示

構成方程式の準保存部分と散逸部分が決定できると、基礎方程式は具体化される。

(i) 連続の方程式

質量保存の法則を表す連続の方程式は前のおりである。

(ii) 運動量の方程式

運動量のつり合い方程式に電磁運動量 $\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ とMaxwellの応力テンソル $\mathbf{T}_{em} = \mathbf{DE} + \mathbf{BH} - p_{em} \mathbf{I}$ を代入すると

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{T}_0 + \rho \mathbf{b} + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{E} + \mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{P}_m \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{P}_m \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \nabla p_{em}^{(1)}$$

が導かれる。 $\rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ は Lorentz 力であり、 $\mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{E} + \mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{E})$ は電気分極ベクトルに作用する力、 $\mathbf{P}_m \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{P}_m \times (\nabla \times \mathbf{H})$ は磁気分極ベクトルに作用する力である。最後の項は、残差圧力項で、電気分極ベクトルと磁気分極ベクトルに基づく電磁圧力の一部である。とくに、 $\mathbf{D} = \epsilon(\rho, T) \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu(\rho, T) \mathbf{H}$ のとき、電気分極ベクトルに作用する力は、誘電体に働く力に等しく

$$\text{誘電体に働く力} = -\frac{1}{2} E^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla (E^2 \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho})$$

となる。また、磁気分極ベクトルに作用する力は、磁性体に働く力に等しく

$$\text{磁性体に働く力} = -\frac{1}{2} H^2 \nabla \mu + \frac{1}{2} \nabla (H^2 \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho})$$

となる。これらの結果はStratton(1941)やLandau-Lifshitz(1976)の結果と一致する。

(iii) 角運動量の方程式

角運動量のつり合い方程式にMaxwellの応力テンソルを代入すると

$$\rho \frac{ds}{dt} = \nabla \cdot \Delta + \rho l + \mathbf{e} : \mathbf{T}_0 + \mathbf{P} \times \mathbf{E} + \mathbf{P}_m \times \mathbf{H}$$

となる。ここで、 $\mathbf{P} \times \mathbf{E} + \mathbf{P}_m \times \mathbf{H}$ は電磁偶力を意味している。

(iv) エネルギーの方程式

エントロピーで書かれたエネルギー方程式はすっきりしている。しかし、内部エネルギーで書かれたエネルギー方程式は複雑である。これは、内部エネルギーが $u = u_0 + u_{em}$ 、熱力学的圧力が $p = p_0 + p_{em}$ と分解され、電磁力による部分 u_{em} と p_{em} が複雑なためである。表3のエネルギー式にMaxwellの応力テンソルと電磁気学の恒等式を代入する。その結果、

$$\rho \frac{d}{dt} \left(u - \frac{w_{em}}{\rho} \right) = -(p - \hat{w}_{em}) \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi_e - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \Phi_{em}$$

となる。ここで Φ_v と Φ_{em} は表9の散逸関数である。電磁場が作用しない場合、電磁エネルギー w_{em} 、電磁エクセルギ $\dot{w}_{em}$ 、電磁散逸エネルギー Φ_{em} は零になり、普通のエネルギー方程式となる。とくに電束密度と磁束密度が $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ で ϵ と μ が定数ならば、表8から明らかなように $\dot{w}_{em} = p_{em}$ 、 $w_{em}/\rho = u_{em}$ で、それぞれ電磁圧力と内部エネルギーに等しい。このとき、エネルギー方程式は

$$\rho \frac{du_0}{dt} = -p_0 \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi_e - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}'$$

と簡略化される。すなわち、電磁場の相互作用によってエネルギー方程式にJoule熱の項のみが付加されたことになる。しかし、非線形マイクロ・ポーラ電磁流体においては表8で定義される $p_{em}^{(i)}$ と $u_{em}^{(i)}$ の項が、電磁場と流体の相互作用として圧力と内部エネルギーの中に残る。

以上の結果を表11にまとめておく。

ただし、

$$p_{em}^{(1)} = \int_0^E \left(\frac{\partial (v \mathbf{P})}{\partial v} \right)_{T, E, H} \cdot d\mathbf{E} + \int_0^H \left(\frac{\partial (v \mathbf{P}_m)}{\partial v} \right)_{T, E, H} \cdot d\mathbf{H}$$

$$p_{em}^{(i)} = \int_0^E \mathbf{v} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v} \right)_{T, E, H} \cdot d\mathbf{E} + \int_0^H \mathbf{v} \left(\frac{\partial \mathbf{P}_m}{\partial v} \right)_{T, E, H} \cdot d\mathbf{H}$$

$$u_{em}^{(i)} = \frac{T}{\rho} \left[\int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho, E, H} \cdot d\mathbf{E} + \int_0^H \left(\frac{\partial P_m}{\partial T} \right)_{\rho, E, H} \cdot d\mathbf{H} \right]$$

$$\rho v = 1$$

表11 基礎方程式

質 量	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
運 動 量	$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{T}_0 + \rho \mathbf{b} + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{E} + \mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{P}_m \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{P}_m \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \nabla p_{em}^{(1)}$
角運動量	$\rho \frac{ds}{dt} = \nabla \cdot \Delta + \rho l + \mathbf{e} : \mathbf{T}_0 + \mathbf{P} \times \mathbf{E} + \mathbf{P}_m \times \mathbf{H}$
エネルギー	$\rho \frac{d}{dt} (u_0 + u_{em}^{(i)}) = -(p_e + p_{em}^{(i)}) \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi_e - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \Phi_{em}$
エントロピー	$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + er + \Phi_e + \Phi_{em}$

表12 Maxwellの方程式

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_e \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

表13 電磁場の構成方程式

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_{em} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ \mathbf{j} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{v}\end{aligned}$$

である。以上で電破効果を伴う流体運動を記述する基礎方程式はすべてである。すなわち、質量・運動量・角運動量・エネルギーのつり合いを表す4つの方程式(表11)とMaxwellの4つの方程式(表12)と電磁場の構成方程式(表10および表13)ですべてである。しかし、これまでに調べてきた方程式は一般論であるためかなり複雑である。そこで、物理的本質を損なわない程度にできるだけ簡単な形に近似することが望ましい。

例題1の解答

重力場における非圧縮非粘性流体の加速度の回転は零である。一般に流体の加速度 $\mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

と変形できる。よって加速度の回転が零ならば

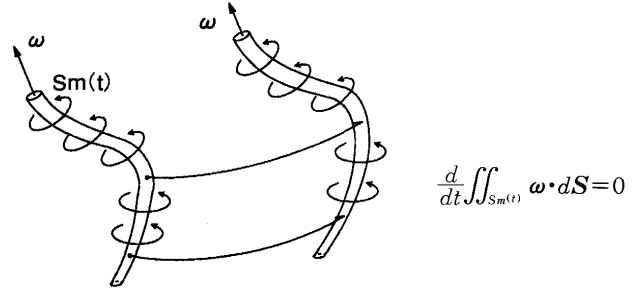
$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times \mathbf{v}) = 0$$

となる。ここでうず度ベクトルは $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ であるから恒等的に $\nabla \cdot \omega = 0$ を満足する。つぎに流体と共に運動するうず管について考える(付図1参照)。このうず管の強さ Γ は

$$\Gamma = \iint_{S_m(t)} \omega \cdot \mathbf{n} dS$$

である。ここで $S_m(t)$ はうず管の断面積である。うず管の強さ Γ の物質時間微分は、流束の輸送定理を用いると

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{S_m} \omega \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_m(t)} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \omega) \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{n} dS$$



付図1 Helmholtzのうず定理

と書ける。ところがこの式の右辺の[]の中は流体の加速度の回転が零ならば零となる。よって $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ ならば

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

となる。よって、うず管の強さは運動中不変である。

(証明終り)

例題2の解答

Newtonの運動に関する第2法則を物質検査体積 $V_m(t)$ に適用すると

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} (\rho \mathbf{v} + \mathbf{g}) dV = \iint_{S_m(t)} \mathbf{t}^{(n)} dS + \iiint_{V_m(t)} \rho \mathbf{b} dV$$

となる。ここで、 $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ は応力ベクトル、 $\mathbf{T}$ は応力テンソルで

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em} + \nu \mathbf{g}$$

である。Reynoldsの輸送定理を用いると、左辺の各項は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV &= \iiint_{V_m(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \\ \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \mathbf{g} dV &= \iiint_{V_m(t)} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} dV + \iint_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot (\nu \mathbf{g}) dS\end{aligned}$$

と変形できる。Gaussの定理を用いて面積分を体積分に変換する。すなわち

$$\begin{aligned}\iint_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot (\nu \mathbf{g}) dS &= \iiint_{V_m(t)} \nabla \cdot (\nu \mathbf{g}) dV \\ \iint_{S_m(t)} \mathbf{t}^{(n)} dS &= \iiint_{V_m(t)} \nabla \cdot (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em} + \nu \mathbf{g}) dV\end{aligned}$$

となる。よって積分形の運動量のつり合い式は

$$\iiint_{V_m(t)} \left[\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \nabla \cdot (\nu \mathbf{g}) \right] dV = \iiint_{V_m(t)} [\nabla \cdot (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em} + \nu \mathbf{g}) + \rho \mathbf{b}] dV$$

と変形できる。この等式が任意の体積 $V_m(t)$ について成立することから、微分形の運動量のつり合い式

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{em}) + \rho \mathbf{b}$$

が導ける。

(証明終り)