

境界要素法によるコールド・クルーシブルの 3次元磁場解析

岩井 一彦*・佐々 健介*²・浅井 滋生*²

Three Dimensional Analysis of Magnetic Field around a Cold Crucible System by Using the Boundary Element Method

Kazuhiko IWAI, Kensuke SASSA and Shigeo ASAI

Synopsis: Three dimensional magnetic field around a cold crucible system has been analysed by using the boundary element method to get the basic information for designing a cold crucible system. From the computed magnetic field distribution, heat generation rates in the charge, the crucible and the coil were calculated. The calculated magnetic field and heat generation rates in the charge, the crucible and the coil showed good agreement with the observed ones. The axial and radial components of magnetic field are dominant in comparison with the azimuthal component. The heat generation rate in the charge increases with decreasing the gap between the charge and the crucible or with increasing the diameter of the charge, under the same coil current. Energy efficiency can be improved by increasing the surface of the charge and decreasing the surface of the crucible. The distribution of heat generation rate in the charge along the axis is sensitive to the arrangement of the coil.

Key words: electromagnetic processing of materials; electromagnetic metallurgy; induction heating process; cold crucible; non-contact melting; boundary element method; three dimensional analysis of magnetic field.

1. 緒言

コールド・クルーシブル・システムはセグメントに分割された水冷銅るつぼ（クルーシブル）と被融解物（チャージ），およびコイルから構成される非汚染融解装置である。コイルに高周波電流を印加することにより，クルーシブルを介してチャージに誘導電流を生じせしめ，それをジュール加熱すると同時に，磁場と誘導電流との相互作用により生じる磁気圧を利用してチャージをるつぼと非接触の状態に保持する。非接触融解であるため，るつぼからの汚染や反応を除去することができ，かつ昇温能力も優れているため，Ti, Zr等の活性金属や高融点材料の融解プロセス，さらに放射性材料の処理プロセスとしてその活用が期待されている。しかしながら，システムの最適設計および操業にあたってはクルーシブル形状が磁場分布に及ぼす影響等，解明すべき問題も多く残されている。

クルーシブル内の磁場分布を正確に把握することは，磁気圧，溶湯形状の推定を可能にするばかりではなく，試料内部での発熱量や装置のエネルギー効率，さらに伝熱解析と組み合わせることにより昇温能力をも見積ることができる。すなわち，装置設計において磁場分布の把握は極めて

重要である。コールド・クルーシブル周りの磁場は3次元の分布を呈しており，これまで計算機の処理能力の限界から電磁場解析は次に述べる近似的な取扱いに委ねられてきた。電流が水平ループを描くと仮定したワイヤーモデル¹⁾²⁾，更にそれを発展させた準3次元モデル³⁾，軸対称モデルの改良型⁴⁾等である。一方，3次元の解析として有限要素法による計算⁵⁾も行われているが，高周波磁場下では電磁浸透厚みが薄くなりメッシュ数の増加は避けられず，計算機の記憶容量の制約を強く受けることとなる。

本報では連続鑄造タイプのコールド・クルーシブルの3次元磁場解析を境界要素法を用いて行い，クルーシブル形状およびコイル配置が磁場分析を介してプロセス変数に及ぼす影響について得られた知見を報告する。

2. 解析

2・1 解析方法の選定

主要な数値解析の手法としては差分法，有限要素法，境界要素法が挙げられる。このうち差分法は，2点間の距離が無限小であるときの関数の勾配である微分を，2点間の距離が有限であるときの関数の勾配である差分で近似する

平成4年6月11日受付 平成4年10月2日受理 (Received on June 11, 1992; Accepted on Oct. 2, 1992)

* 名古屋大学大学院 (Graduate School, Nagoya University, Furo-cho Chikusa-ku Nagoya 464-01)

* 2 名古屋大学工学部 (Faculty of Engineering, Nagoya University)

手法である。この手法はプログラミングが容易であるが複雑形状の解析に向かない。また、計算対象とする物理量が無限領域に広がる開領域問題の取扱いができない点がこの手法の欠点である。主に、流体力学の分野で繁用されている。

有限要素法は変分原理に基づく手法であり、解析領域をメッシュに分割し各メッシュごとに簡単な近似式を設定し、全体を近似するもので、不均一材料の取扱いや非線形問題の取扱いができる等の利点があるものの、差分法と同じく開領域問題の取扱いには不向きである。また、領域全体を分割する必要があるため3次元問題を取り扱う際には大きな記憶容量が必要となる。

境界要素法はグリーンの定理を用いて境界上で近似的に境界条件を満足させる手法である。領域全体ではなく境界だけの離散化ですむため、解析の次元が一つ下がり、記憶容量が少なくてすむ利点がある。また、開領域問題を取り扱える点も大きな利点として挙げられる。しかしながら、不均一材料を含む系への適用および非線形問題の取扱いが難しいこと、等の弱点を有する。

本解析においては、電磁場は空間全体に広がりをもつため、開領域問題として取り扱う必要があること、コールド・クルーシブルのような複雑形状の物体を含む3次元の電磁場解析においては計算機の容量が解析の制約となり、その抑制が望まれること、媒質は均質等方性であり、全空間にわたって比透磁率が1であること等の点を考慮して境界要素法を採用した。

チャージ、クルーシブル、コイルの電磁浸透厚みは後述の実験条件に基づく約0.6mmと計算され、装置サイズに比べて極めて小さく、導体に浸透する磁束は無視し得るとした。すなわち、本解析では、チャージ、クルーシブル、コイルを完全導体と仮定し、解析領域を自由空間のみとする。また、磁場分布の周波数依存性はないものとして磁気スカラーポテンシャルを未知数とした解析を行う。この方法は記憶容量の面でベクトルポテンシャルを未知数とする方法に比べて有利である⁹⁾。

2・2 磁気スカラーポテンシャルの支配方程式

自由空間中の磁場 $\mathbf{H}$ を印加電流による磁場 $\mathbf{H}_s$ と誘導電流による磁場 $\mathbf{H}_i$ に分けて取り扱う。

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

このうち、印加電流による磁場 $\mathbf{H}_s$ はビオ・サバールの法則⁷⁾に従う。

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{4\pi} \cdot \int \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dV \quad \dots\dots\dots (2)$$

一方、誘導電流による磁場 $\mathbf{H}_i$ の回転は自由空間では零となる。

$$\nabla \times \mathbf{H}_i = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

従って、磁気スカラーポテンシャル(磁位) Ω が次式で定義できる。

$$\mathbf{H}_i = -\nabla \Omega \quad \dots\dots\dots (4)$$

また、磁束密度 $\mathbf{B}$ は以下の連続条件を満足する。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

また、構成方程式として次式が成立する。

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots (6)$$

(4)～(6)式より磁気スカラーポテンシャル Ω は以下のラプラスの方程式を満足することとなる。

$$\nabla^2 \Omega = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

この式の両辺に3次元ラプラス方程式の基本解 G を掛け、解析領域全体にわたって体積積分を行う。その際、グリーンの定理により体積積分を面積積分に変換すると、次の境界積分方程式が得られる。

$$c_1 \Omega = \int_s \frac{\partial \Omega}{\partial n} G dS - \int_s \Omega \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $\partial/\partial n$ は解析領域から外向きの法線方向への微分を表し、基本解 G は(9)式で与えられる。定数 c_1 は磁気スカラーポテンシャル Ω を求める点が解析領域に含まれる割合であり、(10)式で与えられる。

$$G = \frac{1}{4\pi r} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$c_1 = \begin{cases} 0 & (\text{解析領域外}) \\ 0.5 & (\text{境界}) \\ 1 & (\text{解析領域内}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (10)$$

(8)式で積分面 S をチャージ、クルーシブル、コイルの表面として、それを離散化する。

境界条件は次のようにして決定する。チャージ、クルーシブル、コイルを完全導体と仮定しているため、その表面で磁場の法線方向成分は零となる。

$$\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

(1)、(4)式を上式に代入し、磁気スカラーポテンシャル Ω を使って表すと次式を得る。

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n} = \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{H}_s \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $\mathbf{H}_s$ は(2)式より計算されるものである。チャージ、クルーシブル表面上では(12)式を境界条件とする。

一方、コイル表面での H_s は印加電流の線密度 K_s と次式で関係づけられる。

$$H_s = K_s \times i_n \quad \dots\dots\dots (13)$$

すなわち、

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

がコイル表面上での境界条件である。

(8)式を境界条件(12)、(14)式のもとで解くと積分面上の Ω が求められる。その値を用いて任意の位置での誘導磁場 H_g が(4)、(8)式より計算される。これに(2)式から計算される印加磁場 H_s を加えれば、所望の位置での磁場 H が求められる。一方、導体内部の発熱は表層近傍に流れる高周波電流のジュール損によるため、導体中での磁場分布を半無限1次元の磁場拡散モデルで近似して、導体の単位表面積当たりの発熱速度 q を(15)式(付録参照)で推算し、チャージ、クルーシブル、コイルの発熱速度を求めた。

$$q = \left\{ \frac{\mu \omega}{2\sigma} \right\}^{1/2} H_0^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 H_0 は導体表面での磁場強度の実効値を表す。

2・3 コイルの印加電流密度分布に関する検討

解析対象としたコイルの内径は40mm、外径は55mmであり、その断面は角型である。従ってコイルを流れる印加電流はインダクタンスの小さいコイル内側面に集中し、インダクタンスの大きいコイル外側面にはあまり流れないことが予測される。しかしながら、実験系においてインダクタンスを解析的に求めることはできないため、コイル表面で磁場測定を行い、その値を用いてコイルの内側面、外側面、上下面のそれぞれを流れる印加電流の線密度の比を決定した。なお、磁場測定はコイルのみを設置し、クルーシブルもチャージも挿入しない条件下で行った。その結果に基づいて、各面を流れる電流の線密度の比を、内側面:上下面:外側面=0.64:0.31:0.05と決定した。

3. 解析結果および考察

3・1 解析の妥当性

解析対象とした系をFig. 1に示す。クルーシブルは銅製の8スリット分割型連続鋳造タイプである。コイルの断面形状は角型の4ターンであり、アルミニウム円筒を模擬チャージとして用いた。磁場測定は下部の40mmが短絡されてその部分にフランジを具備するクルーシブルを用いた(参考文献8)のFig.1(a)参照)。短絡部およびフランジはコイルから十分離れており、磁場分布には大きな影響を与えないものと判断して⁸⁾、クルーシブルはストレートタイプで、かつ全長にわたってスリットがあるものと仮定し解析を行った。

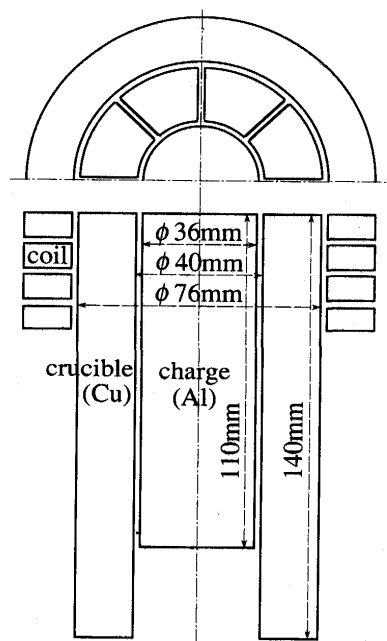


Fig.1. Cold crucible system adopted for numerical calculation.

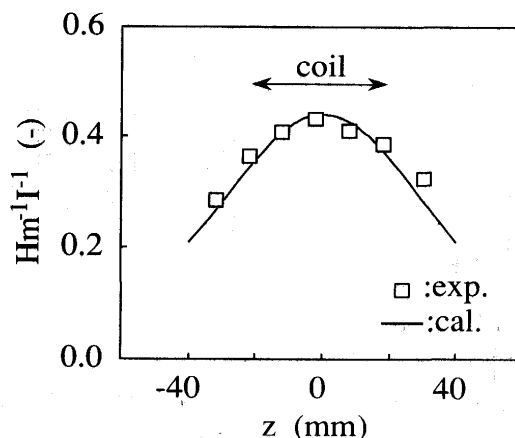


Fig.2. Comparison of calculated and experimental magnetic flux density along the axis.

コイル電流、周波数は実験条件に合わせ、それぞれ1000A、20kHzとした。使用した計算機は名古屋大学大型計算機センターのM-780/20であり、計算時間は約1時間30分、メモリは約60MBであった。

まず、磁場分布計算の妥当性を検証するため、コイルのみの状態で中心軸上の磁場の測定および計算を行った。なお、磁場の測定は0.1mm径の銅線で作製したサーチコイルを用いて両端に生じる誘導起電力の値から求めた。得られた磁場の値をコイルの単位長さ当たりのアンペア・ターン数で規格化してFig. 2に示す。計算結果と測定結果は定量的に良く一致しており、本法で磁場分布の計算を精度良く行い得ることがわかった。

次に、チャージ、クルーシブル、コイルの発熱速度をそ

Table 1. Comparison of heat generation rates in charge, crucible and coil calculated by using B.E.M. with experimental ones.

	charge	crucible	coil	total
Q_{cal} (kW)	1.22	7.66	2.65	11.53
Q_{exp} (kW)	1.18	7.39	4.85	13.42
Q_{cal}/Q_{exp} (-)	1.03	1.04	0.55	0.86

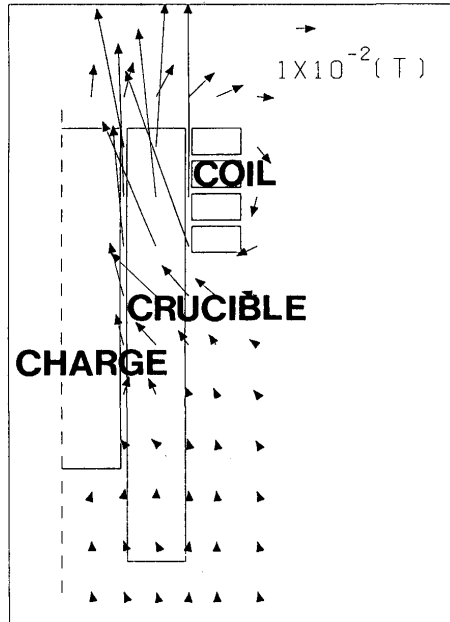


Fig.3. Spatial distribution of magnetic flux density over the cross-section at slit.

れぞれに流れる冷却水の温度上昇と流量から求めた。その結果を計算から得られた発熱速度と共にTable 1に示す。計算によって得られたコイルの発熱速度は実験によるものの約半分の値であった。本実験でコイルとして用いた銅管のうち取り付け部分の長さは銅管全長の約1/3を占め、更に銅管は銅製ブロックに取り付けられている。これらの部分のジュール発熱を解析では考慮していないため、実験値とのずれが生じたと考えられる。チャージ、クルーシブルにおいては計算値と実験値は良く一致しており、発熱速度の観点からも計算結果は妥当であると判断される。

3・2 コールド・クルーシブルの磁場分布

スリットを含む縦断面内の磁場分布の計算結果をFig.3に示す。磁場はコイルを中心としてループを描いており、コイルに対応する高さで強められている。また、コイルより外側では急激に弱くなっていることがわかる。更に、コイルから離れたクルーシブル下部での磁場は極めて小さく、この部分がコールド・クルーシブルの磁場分布や発熱に及ぼす影響は小さいといえる。

次に、クルーシブルが存在することにより磁場分布がどのように変化するかを調べるため、①チャージとコイル、②クルーシブルとコイル、の存在下での計算も行った。チャージとクルーシブルとの間隙のスリットに対応する位置

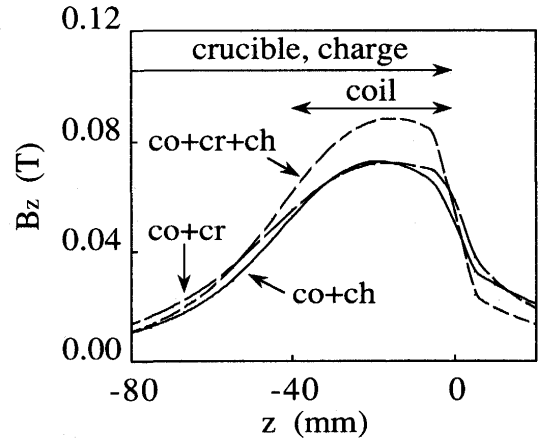


Fig.4. Distributions of the axial component of magnetic flux density in the vicinity of inner surface of the cold crucible.

Table 2. Comparison of heat generation rates in charge, crucible and coil in the cases with and without charge and/or crucible.

	charge	crucible	coil	total
without crucible				
Q_{cal} (kW)	0.84		1.56	2.40
without charge				
Q_{cal} (kW)		6.50	2.42	8.92
with crucible and charge				
Q_{cal} (kW)	1.22	7.66	2.65	11.53

の磁束密度の軸方向成分の計算結果をFig. 4に示す。なお、方位角方向成分はいずれの場合も軸方向成分の1/10以下であった。よって縦方向の電流はほとんど存在しないと考えられる。コイル内にチャージとクルーシブルの両方が存在する場合はそのどちらかしか存在しない場合に比べコイルに対応する高さでの磁場の集中化が見られる。これはコイルに囲まれた水平面で磁束を排除する導体の割合が増加したためと思われる。従って、この部分ではチャージの局所的な加熱が生じることになる。Fig. 3とあわせて考察すると、チャージ、クルーシブルが存在しないコイルより上部においては磁場が急激に減衰すると共に、その成分が軸方向成分から半径方向成分へと変化することがわかる。一方、コイルより下側においてはチャージ、クルーシブルに誘導電流が存在するため磁場の減衰は緩やかなものとなっている。このときのチャージ、クルーシブル、コイルの発熱速度をTable 2に示す。クルーシブルが存在することによりチャージの発熱速度が増加していることがわかる。

3・3 チャージ、クルーシブルのサイズが発熱速度に与える効果

ここでは、①クルーシブルのサイズを変えずにチャージ径のみを変化させた場合、②チャージのサイズを変えずにクルーシブル内径のみを変化させた場合、③クルーシブル内径とチャージ外径との差を一定に保った状態で両者の径

を同時に変化させた場合、の3通りについて計算を行った。まず、①クルーシブルのサイズを変えずにチャージ径のみを12mm, 24mm, 36mmと変化させた場合のチャージ、クルーシブル、コイルの発熱速度とそれぞれが系全体の発熱速度に占める割合をあわせてFig. 5に示す。また、発熱速度をチャージ、クルーシブルそれぞれの体積で割った単位体積当たりの発熱速度をFig. 6に示す。チャージ、クルーシブル、コイルの発熱速度はいずれもチャージ径が大きくなるにつれて増加していることがわかる。クルーシブルはその体積が変化しないにもかかわらず発熱速度が増加する。これはチャージ径が増加するにつれてチャージ、クルーシブル間で磁場が強められることによるものである。しかしながら、クルーシブルの発熱の全体に占める割合はチャージ径の増加にともない減少している。一方、チャージは発熱速度、全体に占める割合とも増加している。Fig. 6に見られるように、単位体積当たりのチャージの発熱速度は径の増加につれて減少している。一般に高周波磁場を印加した場合、誘導電流は導体の表面のみに流れると考えてよいので、

表面の磁場強度が変わらなければチャージの発熱速度は表面積に比例すると考えることができる。チャージ径が増加するとその表面積、体積とも増加するが、体積増加の割合のほうがより大きいので、チャージの単位体積当たりの発熱速度は減少する(体積効果)。一方、チャージ径の増加は先に述べたように磁場強度の増大をもたらすので発熱速度は増加する(磁束効果)。更に、コイルに囲まれた水平面内の磁場は均一ではなく、周辺部ほど強く中心部に向かうにつれて弱くなるため、チャージ径が大きいほど表面の磁場は強くなり発熱速度は増加する(分布効果)。Fig. 6の結果はこれらの効果の重畳によるものと考えられる。

次に、②チャージのサイズを変えずにクルーシブル内径のみを40mm, 52mm, 64mmと変化させた場合の結果をFig. 7, Fig. 8に示す。チャージ径を変えた場合と同様に、チャージとクルーシブルとの間隙が大きくなるにつれて、チャージの発熱速度、クルーシブルの発熱速度とそれが全体に占める割合、コイルの発熱速度は減少している。ただし、チャージあるいはコイルの発熱が全体に占める割合はわず

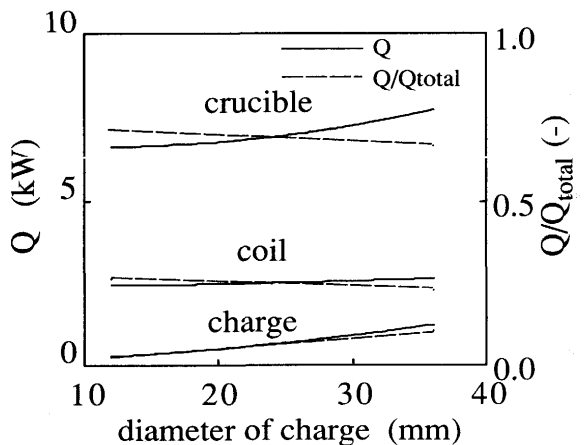


Fig. 5. Effect of charge diameter on heat generation rates in crucible, coil and charge and their ratios.

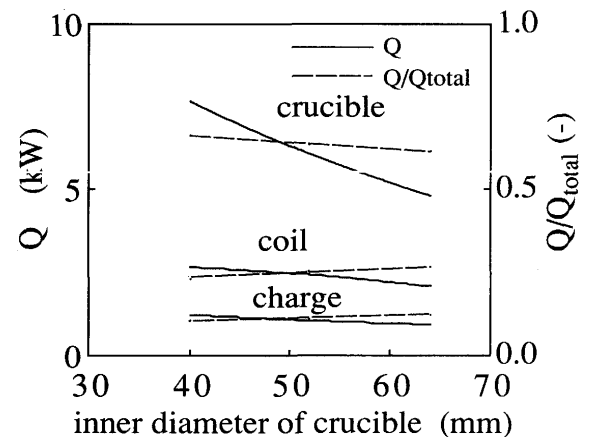


Fig. 7. Effect of inner diameter of crucible on heat generation rates in crucible, coil and charge and their ratios.

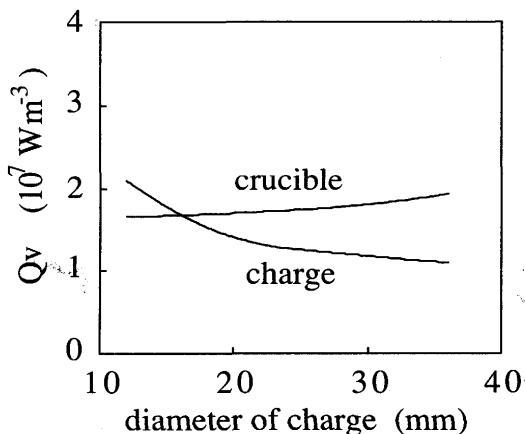


Fig. 6. Effect of charge diameter on heat generation rates per unit volume in crucible and charge.

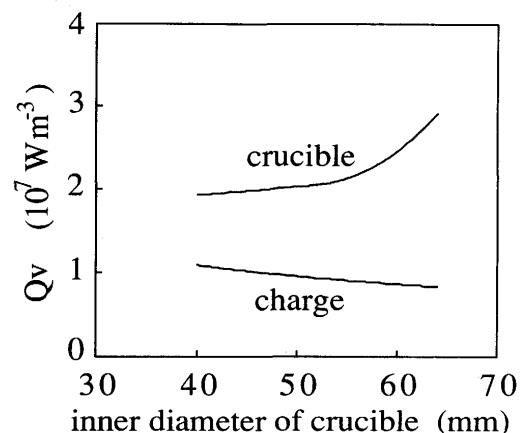


Fig. 8. Effect of inner diameter of crucible on heat generation rates per unit volume in crucible and charge.

かたが増加傾向を示している。これは発熱の大部分を占めているクルーシブルの発熱が大きく減少するためである。チャージとクルーシブルとの間隙が大きくなるにつれて磁場は弱くなるのでチャージの単位体積当たりの発熱速度は低下する。クルーシブル内径の増加に伴い、単位体積当たりの発熱速度が増加するのはクルーシブルの体積減少がもたらす体積効果の寄与が大きいためである。

最後に、③クルーシブル内径とチャージ外径との差を一定に保った状態で両者の径を変化させた場合の結果をFig. 9, Fig.10に示す。この場合、コイルの発熱速度およびそれが全体に占める割合はほとんど変わらない。一方、チャージの発熱速度とそれが全体に占める割合はその径の増大に伴って大きくなっている。ここでは体積効果の寄与が大きいため、単位体積当たりのチャージの発熱速度は径の増加に伴い減少する。よって、これを補うためには磁場を強くする必要がある。

以上の結果から、コイル電流同一の条件下では、①チャージとクルーシブルとの間隙を小さくするほどチャージの

発熱速度の増加が可能であること、②全体の発熱に対するチャージの発熱の割合を増加させるためにはチャージ表面積を大きく、クルーシブル表面積を小さくすると良いこと、がわかる。ただし、ここでの発熱速度はチャージ全体に単位時間あたりに投入されたエネルギーであり、チャージ径の増加にともないチャージの熱容量も増加するので、単位体積当たりのチャージの発熱速度を同一に保持するためにはチャージ径の増加に応じてコイル電流を大きくする必要がある。

3・4 コイル配置の効果

コイル配置が発熱速度に与える効果を調べるために、①軸方向長さ40mmの4ターンコイルの上面とクルーシブル、チャージの上面の高さを一致させた場合(Fig. 1)を基準として、②コイルの上面をクルーシブル、チャージの上面から20mm下げた場合、③コイルを粗に巻いて軸方向長さを60mmとした場合、のそれぞれについて計算を行った。チャージの軸方向単位長さ当たりの発熱速度分布をFig.11に示す。コイル上面をクルーシブル上面に揃えた場合、チャージ上部に局所的な発熱が見られる。一方、20mm下げた場合にはコイル中央高さを中心としてほぼ対称の発熱速度分布となっている。チャージ、クルーシブル、コイルの発熱速度お

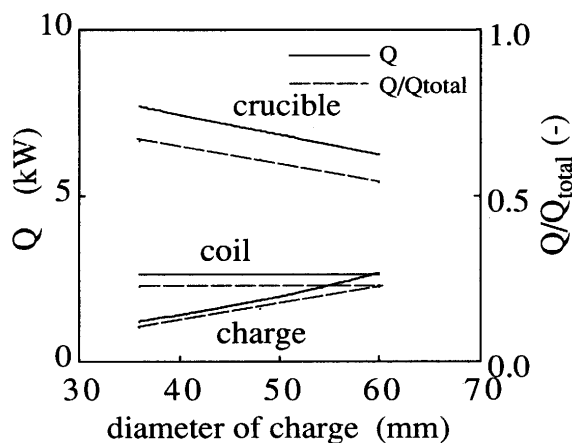


Fig.9. Effect of the diameters of charge and crucible on heat generation rates in crucible, coil and charge and their ratios.

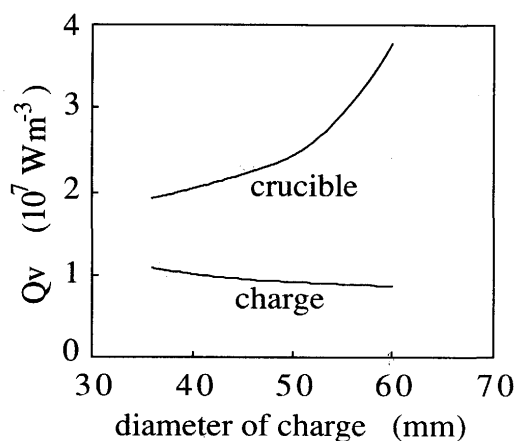


Fig.10. Effect of the diameters of charge and crucible on heat generation rates per unit volume in crucible and charge.

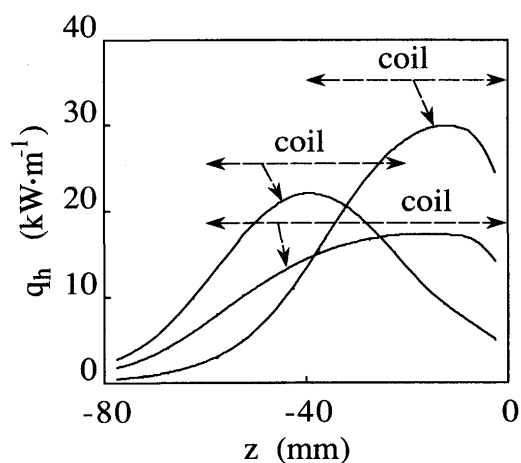


Fig.11. Effect of coil configuration on heat generation rate per unit length in charge.

Table 3. Effect of coil configuration on heat generation rates in charge, crucible and coil.

	charge	crucible	coil	total
tops of the coil and the crucible at the same level				
rate(kW)	1.22	7.66	2.65	11.53
ratio(-)	0.106	0.664	0.230	1.00
top of the coil 20mm lower than that of the crucible				
rate(kW)	1.07	6.99	2.56	10.62
ratio(-)	0.100	0.659	0.241	1.00
rough winding of the coil				
rate(kW)	1.00	5.67	2.21	8.88
ratio(-)	0.112	0.639	0.249	1.00

よびそれらの比をTable 3に示す。発熱速度はチャージ、クルーシブル、コイルともその上面を揃えた場合がいちばん大きくなっている。原料投入等によりチャージ上部で大きな発熱を必要とする場合にはクルーシブル上部とコイル上部を揃えたほうが良く、その場合、チャージの発熱速度が全体に占める割合もコイル位置をさげたときより増加することがわかる。コイルを粗に巻いた場合、チャージの発熱速度は極めて滑らかな分布を呈するようになる。チャージの発熱速度自体は他の場合と比較して小さな値を示すが、チャージの発熱速度が全体に占める割合は増加している。よって、凝固後徐冷を要する材料には適しているコイル配置であると言える。

4. 結言

境界要素法によりコールド・クルーシブルの3次元磁場解析を行った。解析された磁場分布および発熱速度を実測値と比較・検討し、数値解析結果の妥当性を検証した。次に、この数値解析モデルを用いて操業条件変更の効果について検討し、以下の知見を得た。

- 1)クルーシブル周囲の磁場は軸方向成分,半径方向成分が主成分であり,縦電流は水平電流に比べて極めて小さい。
- 2)コイル電流が同一条件のもとでは,クルーシブルの存在により磁場の集中化が図られ,チャージの発熱速度は増大する。また,チャージとクルーシブルとの間隙を狭くするほどチャージの発熱速度は増加する。また,チャージ径を増加させてもチャージの発熱速度を増加させ得る。ただし,この場合,単位体積当たりの発熱速度は低下する。
- 3)チャージ表面積を大きくし,クルーシブル表面積を小さくすることにより,チャージの発熱速度が全体に占める割合を増大させることができる。
- 4)コイルをチャージ,クルーシブルの上面と揃えて配置することによりチャージ上部での局所的な発熱が可能となる。
- 5)コイルを粗に巻くことによりチャージの引き抜き方向発熱分布を滑らかにすることができる。

最後に、本研究の研究費の一部は日本鉄鋼協会特定基礎研究会材料電磁プロセッシング部会、および東レ科学振興会によるものであり、ここに厚くお礼申し上げます。

記 号

- B：磁束密度 (T)
- B_z：磁束密度の軸方向成分 (T)
- Ci：磁気スカラーポテンシャルを求める点が解析領域に含まれる割合(-)
- G：3次元のラプラス方程式の基本解 (1/m)
- H：磁場 (A/m)
- H₀：導体表面における磁場 (実効値) (A/m)
- H₁：誘導電流による磁場 (A/m)
- H₂：印加電流による磁場 (A/m)
- H_x：磁場のx方向成分 (A/m)

- I：コイル電流 (A)
- i_n：外向き法線単位ベクトル (-)
- J：印加電流密度 (A/m²)
- J₀：誘導電流密度 (A/m²)
- j：虚数単位 (-)
- K_s：印加電流の線密度 (A/m)
- k：伝搬定数 (1/m)
- m：コイルの単位長さ当たりの巻き数 (1/m)
- n：法線方向 (m)
- Q：発熱速度 (W)
- Q_{cal}：解析による発熱速度 (W)
- Q_{exp}：実験による発熱速度 (W)
- Q_{total}：系全体の発熱速度 (W)
- Q_v：単位体積当たりの発熱速度 (W/m³)
- q：導体の単位表面積当たりの発熱速度 (W/m²)
- q_h：軸方向単位長さ当たりのチャージの発熱速度 (W/m)
- r：2点間の距離 (m)
- r：電流素片から磁場観測点への位置ベクトル (m)
- S：解析境界面 (m²)
- t：時間 (s)
- V：体積 (m³)
- x：距離 (m)
- y：距離 (m)
- z：距離 (m)
- δ：電磁浸透厚み (m)
- μ：透磁率 (H/m)
- σ：電気伝導度 (S/m)
- Ω：磁気スカラーポテンシャル (A)
- ω：角周波数 (rad/s)

文 献

1) A.Gagnoud, D.Delage and M.Garnier: The 4th Beer-Sheva Seminar on MHD Flows and Turbulence, Beer-Sheva, Israel. Feb.-March,(1984), p. 634
2) M. Kuwabara, H. Nakata, K. Sassa and S. Asai: Proc. of The Sixth Int. Iron and Steel Congress, Nagoya, (1990), p.246
3) T. Toh and M. Garnier: Proc. of The Sixth Int. Iron and Steel Congress, Nagoya, (1990), p. 239
4) 田中努, 栗田興一, 黒田篤彦:鉄と鋼, 77(1991), p. 345
5) 河瀬順洋, 山口忠, 林典史:材料とプロセス, 4(1991), p. 7
6) 中田高義, 高橋則雄:電気工学の有限要素法第2版, (1986) [森北出版]
7) J. A. Stratton: Electromagnetic Theory,(1941),p.232 [McGRAW-HILL]
8) 佐々健介, 桑原守, 安田延侯, 浅井滋生:鉄と鋼, 77(1991), p. 1442

付 録
(発熱速度の推定)

交流磁場は導体表面から内部へ浸透するにつれてその強度は弱まり実質的には限られた距離しか浸透できない。その指標は電磁浸透厚み(δ)と呼ばれ、周波数、電気伝導度、透磁率の平方根に反比例する。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \dots\dots\dots (A-1)$$

電磁浸透厚みが導体のサイズや曲率半径に比べて十分小さいときには電磁場の挙動は半無限の1次元磁場拡散モデルで記述できる。今、z方向に半無限に広がった静止導体の表面(x-y面)にその面と平行なx方向に角周波数ωで振動する磁場を印加したとする。このとき磁場の拡散方程式(A-2)式を(A-3), (A-4)式の境界条件のもとで解くと(A-5)式となる。

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \cdot \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \quad (z \geq 0) \quad \text{.....(A-2)}$$

$$H_x = \sqrt{2}H_0 \quad \text{at} \quad z = 0 \quad \text{.....(A-3)}$$

$$H_x = 0 \quad \text{at} \quad z = \infty \quad \text{.....(A-4)}$$

$$H_x = \sqrt{2}H_0 \exp(-jkz + j\omega t) \quad \text{.....(A-5)}$$

ここでkは伝搬定数とよばれ (A-6) 式で表される。

$$k = \frac{1+j}{\delta} \quad \text{.....(A-6)}$$

誘導電流密度 J_e はアンペールの法則から計算でき、これを用いて単位表面積当たりの発熱速度 q (W/m²) が以下のよう求められる。

$$q = \int_0^\infty \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{|J_e|^2}{\sigma} dt dz = \left[\frac{\mu\omega}{2\sigma} \right]^{1/2} H_0^2 \quad \text{.....(A-7)}$$

導体表面の磁場 H_0 は前述の境界要素法により求められるので、この式を用いてチャージ、クルーシブルの発熱速度の算出が可能となる。