

磁場を印加した連铸铸型における溶湯波動の挙動

李 廷挙*・佐々 健介*²・浅井 滋生*²

Wave Behavior of Melt in a Continuous Casting Mold with Imposition of Magnetic Field

Tingju LI, Kensuke SASSA and Shigeo ASAI

Synopsis : Surface quality of continuously cast metal can be improved by imposing high frequency magnetic field from the outside of a mold. In order to analyze the mechanism of surface quality improvement, the surface wave motion on meniscus and the contacting behavior between the mold and melt were measured by a laser level meter and by an electrical circuit method, respectively. These measured data were analyzed by use of the Fourier analysis method. Molten tin was continuously cast under the condition imposing magnetic field from the outside of the mold and a mathematical model describing wave motion on meniscus was developed. It was found that the motion of melt is consisted of a surface wave and a transverse swing which provides the intermittently contacting between the meniscus and the mold, and the space of ripple marks on the surface of the cast metal is related to frequency of the transverse swing caused by imposition of magnetic field. Surface quality of the cast metal can be improved by decreasing the wave amplitude of meniscus.

Key words : Oscillation mark ; continuous casting ; surface quality of cast metal ; soft contacting solidification ; electromagnetic pressure ; electromagnetic processing of materials ; steelmaking.

1. 緒言

鋼の連铸片の表面欠陥の低減を目的としてモールド外側から誘導磁場(以下磁場という)を印加し、溶湯を電磁気力とモールドの両者で保持する軟接触凝固の提案がなされている¹⁾²⁾。前報³⁾⁴⁾においてはモールドの外側より高周波磁場を印加することにより铸片表面性状の改善が可能であることを明らかにした。その際、メニスカスの波動に伴い生ずる溶湯とモールド壁間の間欠接触状態が铸片の緩冷却状態をもたらし、表面性状の改善につながると推論した⁴⁾。

本研究では、印加磁場がもたらす溶湯表面波動とメニスカス挙動および铸片の表面性状との関連を実験によって求めるとともに、これら三者の間に見られる諸現象の理論解析を行ったので報告する。

2. 実験および結果

実験装置および方法は前報⁴⁾と同じである。室温で溶融状態(融点303K)を示すGaをモールドに満たし、接触通電法⁴⁾によりモールドと溶湯(Ga)との接触状況の経時変化を測定した。また、それと同時にレーザー変位計でモールド中心における波高の測定を行い、湯面波動特性をフーリエ変換器によりスペクトル解析した。なお、これらの測定はコイル

と湯面の相対位置をFig. 1 (詳細は前報⁴⁾のFig. 1 参照)に示すように4通りに変えて行った。また、铸片の表面性状の測定には、溶融錫を連铸したものを用いた。

前報⁴⁾においてメニスカスの波動をレーザー変位計で測定して、(1)磁束密度の増大に伴い溶湯の盛り上がり高さは上昇し、かつ(2)平均振幅が大きくなることを述べた。今回は上述の(1)、(2)の内容について詳しく検討するためフーリエ変換器で波動をスペクトル解析して、磁場の印加が周波数特性に及ぼす効果を詳しく調べた。モールドオンレーションを加えない条件下において、磁場を印加しない場合と印加した場合の波動のスペクトルをFig. 2 a)とb)に示す。図上でピーク値が大きいものから二つのものを選び、

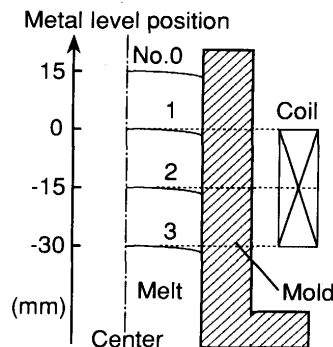


Fig. 1. Relative position of metal level and coil.

平成5年3月17日受付 平成5年7月2日受理 (Received on Mar. 17, 1993; Accepted on July 2, 1993)

* 名古屋大学大学院生 (Graduate Student, Nagoya University, Furo-cho Chikusa-ku Nagoya 464-01)

* 2 名古屋大学工学部 (Faculty of Engineering, Nagoya University)

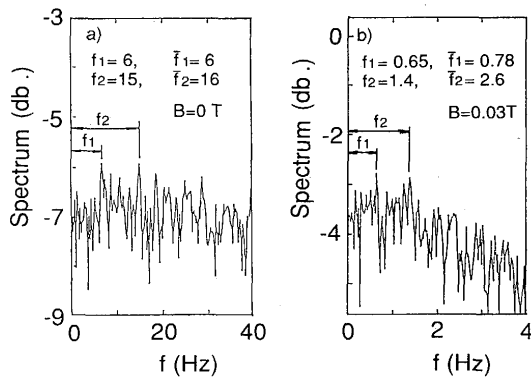


Fig. 2. Spectrum of surface wave motion at the center of a metal pool.

その内の低い方の周波数を f_1 とし、高い方のものを f_2 とすると、Fig. 2 a)より f_1 が6Hz、 f_2 が15Hzと読み取れる。同様にして得られた多数の実験データから f_1 の平均値 $\bar{f}_1$ が6Hz、 f_2 の平均値 $\bar{f}_2$ が16Hzと求まる。

磁場を印加したFig. 2 b)では、 $\bar{f}_1$ は0.78Hz、 $\bar{f}_2$ は2.6Hzとなった。磁場を印加することにより、ピークの値を取る周波数は低い方へと移行することがわかる。

湯面位置1で、高周波発振器の周波数を3.65kHz、磁束密度 B を0.03Tとし、接触通電法により前報⁴⁾で定義した間欠接触部分にて溶湯とモールドの接触状況(あるいは溶湯の揺れ)を測定しFig. 3に示す。図において、電圧の鋭いスパイクは溶湯がモールドと接触したことを示す。これらスパイクの時間間隔 T を測定し、それらを平均すると、 $\bar{T}=2$ sとなり、周波数に変換すると $f=1/\bar{T}=0.5$ Hzと求まる。これより、前報⁴⁾に示したようにメニスカスは常にモールドと接触・剥離を繰り返す間欠接触状態にあることがわかる。次に、同一条件の下、溶湯プール中央で測定した波動とメニスカス周辺で測定した揺れとの相互相関関数をFig. 4に示す。相互相関の周波数は0.45Hzとなり、Fig. 3に示した測定結果より得られた(メニスカス近傍での溶湯波動の周波数)0.5Hzとほぼ同じ値を示すことから、溶湯のメニスカス近傍の波動と溶湯表面の波動とは連動していることがわかる。

磁束密度が0.03, 0.04, 0.05Tの各場合の溶湯表面の相対

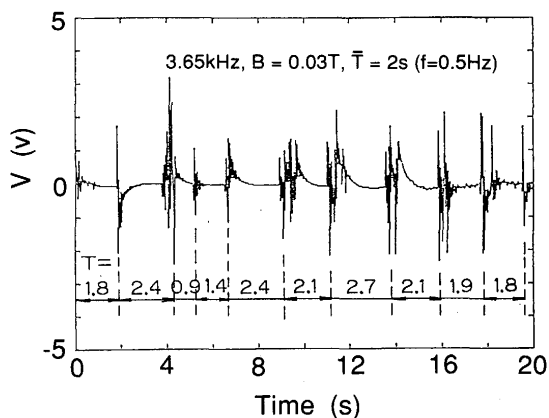


Fig. 3. Appearance of intermittently contacting between melt and a mold.

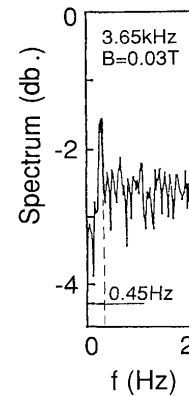


Fig. 4. Spectrum of mutual-correlation function between wave motions at the center of a pool and at meniscus.

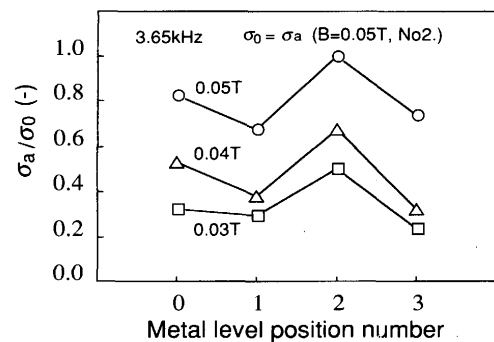


Fig. 5. Effect of metal level position on mean wave amplitude.

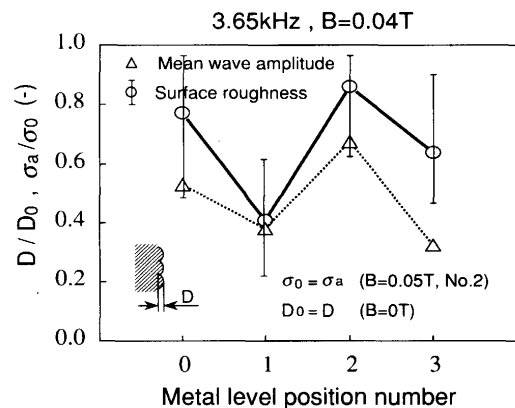


Fig. 6. Relationships between surface roughness and metal level position and between mean wave amplitude and metal level position.

平均振幅 σ_a/σ_0 (σ_0 は $B=0.05$ T、湯面位置2 (Fig. 1 参照)における平均振幅である)と湯面位置の関係をFig. 5に示す。湯面をコイル長さの中心位置に一致させた場合(位置2)にメニスカスは最も不安定となり、コイルの両端(位置1)、(位置3)に一致させた場合にメニスカスは安定することがわかる。

次に、錫を用いて連続鋳造のモデル実験を行い、前報⁴⁾と同様にして求めた鋳片の表面粗度と平均振幅をFig. 6に示す。湯面位置1において表面粗度は小さく、また、平均振幅も小さいことがわかる。電源周波数1.73kHzの場合にも

ほぼ同じ結果が得られた。この結果より鋳片の表面性状の改善には湯面振動の振幅の減少が求められることがわかる。

3. 理論解析

ここでは、磁場印加が表面波動に及ぼす効果を顕在化させるため、モールド・オシレーションを加えない条件のもとで波動の解析を展開する。

3・1 無磁場中に置かれた溶湯の表面静振波

湯面の波動を無限平面に生ずる表面波として考えると波の伝播速度は(1)式で表される⁵⁾。

$$c = \sqrt{(g/k \times k\gamma/\rho) \tanh(kh)} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 c ：波の伝播速度、 g ：重力加速度、 k ：波数、 γ ：表面張力、 ρ ：密度、 h ：溶湯の深さ、である。

$h/L > 1/2$ (波長 $L = 2\pi/k$) では深水波と見なすことができ、 $\tanh(kh) \div 1$ と近似できるので(1)式は(2)式になる。

$$c = \sqrt{(g/k) + (k\gamma/\rho)} \dots\dots\dots (2)$$

ここで液深が一定で波の伝播方向の長さが $2R$ の容器に生ずる波を考える。波数 k と容器の長さ $2R$ の間には次の関係が成り立つ⁶⁾。

$$k = 2\pi m / 2R \quad (m = \pm 1/2, \pm 2/2, \pm 3/2, \dots\dots\dots) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 m は波のモード数である。

(2)式、(3)式を周波数 $f = ck/2\pi$ の関係に代入すると、(4)式が得られる。

$$f = \frac{ck}{2\pi} = \frac{\sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{m} \sqrt{g + \left(\frac{\pi m}{R}\right)^2 \frac{\gamma}{\rho}}}{\sqrt{4\pi R}} \dots\dots\dots (4)$$

溶融Gaの物性値 ($\gamma = 0.72\text{N/m}$, $\rho = 6.1 \times 10^3\text{kg/m}^3$) と容器半径 ($R = 1.5 \times 10^{-2}\text{m}$) を(4)式に代入すると、モード数 m を変数として表面波動の周波数が求まる。横軸に m を縦軸に計算値の周波数を採って Fig. 7 (a) に示す。また、Fig. 2 a) に示した表面波動の周波数の実験結果より、第1ピークの

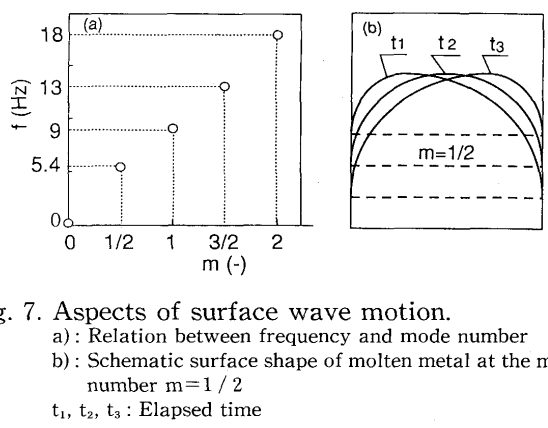


Fig. 7. Aspects of surface wave motion.
a): Relation between frequency and mode number
b): Schematic surface shape of molten metal at the mode number $m = 1/2$
 t_1, t_2, t_3 : Elapsed time

周波数の平均値 $\bar{f}_1$ は 6Hz で、これは $m = 1/2$ の計算値 5.4Hz とほぼ一致する。すなわち、ここで観測された表面波動は Fig. 7 (b) に示すように半波長で両端の壁に接する $m = 1/2$ を基本モードとした波動であることがわかる。

3・2 磁場中に置かれた溶湯の運動

2章で示した実験結果より、磁場の印加によって、溶湯には表面静振波と横揺れが生じていることがわかった。次に、この二つの現象に及ぼす磁場の影響を解析する。

3・2・1 溶湯の表面静振波に及ぼす印加磁場の効果

溶湯を非粘性、非圧縮、渦なしと仮定すれば、速度ポテンシャル ϕ を定義することができ、その基礎方程式は(5)式となる。

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2 = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここで、Fig. 8 に示すように2次元の系 (X - Z 平面) を考えて、 Z 軸を鉛直上向に取り、 $z = 0$ を静止湯面、 $z = -h$ を湯底とする。

時間に関して周期的に変化する微小波 (角振動数 ω) を取り扱うとして、 $\phi(x, z, t)$ を(6)式で表す。

$$\phi(z, x, t) = \phi(x, z) \exp(-i\omega t) \dots\dots\dots (6)$$

次に、自由表面の位置を(7)式で表す。

$$\eta = a \sin(kx - \omega t) \dots\dots\dots (7)$$

すると、(5)式の解は(8)式となる (誘導は付録1に示す)。

$$\phi = \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh\{k(z+h)\}}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t) \dots\dots\dots (8)$$

(9)式のベルヌーイの式⁵⁾において、 u^2 の項を無視し、さらに、湯面で表面張力による圧力 $-\gamma \partial^2 \eta / \partial x^2$ と磁気圧力 P_z を考慮すると、 $P = P_0 - \gamma \partial^2 \eta / \partial x^2 + P_z$ となり、(10)式が得られる。

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 + g\eta - \frac{\partial \phi}{\partial t} = a_0 \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 a_0 は定数である。

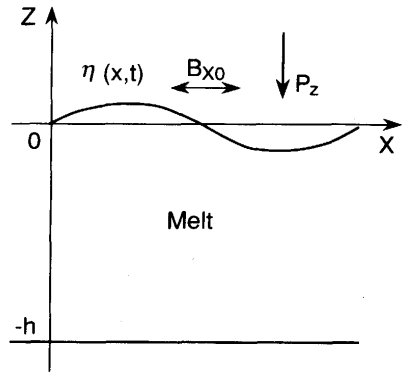


Fig. 8. Model of surface wave of molten metal.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g\eta + P_z/\rho - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (10)$$

なお、(10)式の誘導に当たっては $\eta = 0$ での関係式 $a_0 = P_0/\rho$ を用いた。

湯面に作用する磁気圧力 P_z は(11)式で表される⁹⁾。

$$P_z = \frac{B_{x0}^2 k \eta}{2\mu} F(k\delta) \cos^2 \theta \quad (11)$$

ここで、 δ ：磁場の浸透深さ(m)、 θ ：波数ベクトルと印加磁場のなす角、

$$F(x) = \frac{\sqrt{(x^4+4)+x^2} + (1-x)\sqrt{(x^4+4)-x^2}}{\sqrt{2(x^4+4)}}, \quad x = k\delta,$$

である。 $x \gg 1$ では $F(x) \approx 1/x$ と近似できるので、(11)式で $F(x) = 1/x$ 、 $\theta = 0$ として、これを(10)式に代入すると、(12)式となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g\eta + \frac{B_{x0}^2 \eta}{2\mu\rho\delta} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (12)$$

さらに、(7)、(8)式を(12)式に代入し、 $z = 0$ とすると、(13)式の分散関係式が得られる。

$$\omega^2 = (gk + \frac{kB_{x0}^2}{2\mu\rho\delta} + \frac{\gamma k^3}{\rho}) \tanh(kh) \quad (13)$$

深水波の場合($h/L > 1/2$)では $\tanh(kh) \approx 1$ となるので波速 c が(14)式で表されることになる。

$$c \equiv \omega/k = \sqrt{g/k + B_{x0}^2/2\mu\rho\delta + \gamma k/\rho} \quad (14)$$

波の伝播方向の長さが $2R$ の容器に磁場を印加した場合に生ずる表面静振波の周波数 f は、(3)式と(14)式を用いると(15)式となる。

$$f = \frac{ck}{2\pi} = \frac{\sqrt{m} \sqrt{g + \frac{B_{x0}^2}{2\mu\rho\delta} + \left(\frac{\pi m}{R}\right)^2 \frac{\gamma}{\rho}}}{\sqrt{4\pi R}} \quad (15)$$

(4)式と(15)式を比較してみると、磁場を印加することにより表面静振波の周波数は $(B_{x0}^2/2\mu\rho\delta)$ の寄与の分だけ増大することがわかる。ただし、本実験系のように磁場の主成分は垂直方向成分の B_z で、水平方向成分 B_x に対して $B_x \ll B_z$ (本実験系では、 $B_z = 4 \times 10^{-2}$ Tの時、 $B_x = 3.2 \times 10^{-3}$ Tと実測された。)が成立する。したがって、 $(B_{x0}^2/2\mu\rho\delta)$ の値は 0.2 m/s^2 となり、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ の値に比較して十分小さく無視できることがわかる。すなわち、水平方向の磁場は表面静振波にはほとんど影響を及ぼさないことになる。Fig. 2 b)に示した結果を見ると、磁場を印加することにより周波数は低い方へ移行しているが、これは次に述べる磁場印加による横揺れに起因するものと考えられる。

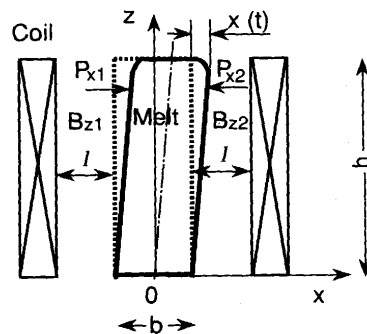


Fig. 9. Model of transverse swing of molten metal cylinder.

3.2.2 溶湯の横揺れと鋳片表面の縞の間隔

磁場中に置かれた溶湯は磁気圧力によって凸型に盛り上がるが、それを溶湯柱と見たてて、その揺れをFig. 9に示すようにモデル化する。すなわち、溶湯は磁気圧力 P_{x1} と P_{x2} によって誘起される X 方向一次元の微小揺れと仮定する。

溶湯の揺れの運動は(16)式で表され、その時の角周波数 ω は(17)式となる(誘導は付録2に示す)。

$$x = A \sin(\omega t) \quad (16)$$

$$\omega = B_{z0} / \sqrt{\mu\rho b l} \quad (17)$$

ここで、 A は積分定数で横揺れの振幅を表す。Gaの物性値($\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)}$ 、 $\rho = 6.1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$)と実験条件($b = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、 $l = 1.7 \times 10^{-2} \text{ m}$)を(17)式に代入し、磁束密度と横揺れの角周波数 ω の関係を求め、実測値とともにFig. 10に示した。 ω の実測値は理論値よりやや小さいものの、 B_{z0} の増大に伴い直線的に大きくなっており(17)式の解析結果とほぼ同じ傾向を示した。

Stempleら⁷⁾は注湯速度(すなわち湯面波動)の増大に伴い、鋳片表面のオシレーションマークの間隔が大きくなることを報告している。また、竹内ら⁸⁾は連続鋳造におけるオシレーションマークのピッチ E と鋳造速度 v 、鋳型振動周波数 f_{mold} の関係が次式で表せることを見いだしている。

$$E = v / f_{mold} \quad (18)$$

電磁場を印加すると、溶湯はモールドと間欠接触状態に

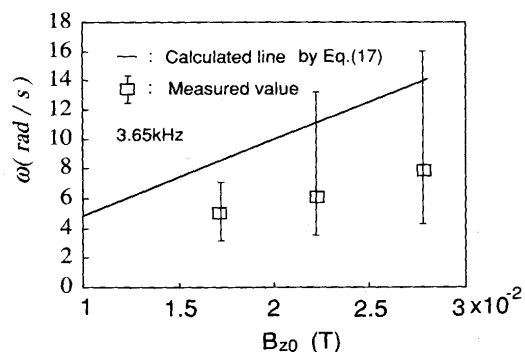


Fig. 10. Comparison between calculated and observed values of frequency of transverse swing.

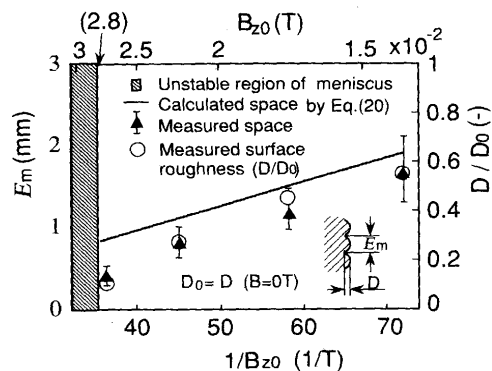


Fig. 11. Effect of magnetic flux density on space between ripple marks and surface roughness on cast metal surface.

置かれるため、鋳片表面の縞はオシレーションマークのように鋳型振動で決めるのではなく、先に述べた溶湯とモールドとの間欠接触によって決まると考えることができる。そのように考えると、(18)式における鋳型振動周波数 f_{mold} に代わり、間欠接触の周波数 f_i を代入することによって磁場を印加した場合の鋳片表面の縞の間隔 E_m が求まることになる。

$$E_m = v/f_i = 2\pi v/\omega \quad (19)$$

(17)式に示した横揺れの角周波数 ω を(19)式に代入すると(20)式が得られる。

$$E_m = \alpha v/B_{z0}, \alpha \approx 2\pi\sqrt{\mu\rho b l} \quad (20)$$

実験で求められる鋳片表面の縞の間隔 E_m と(20)式から求まる計算値との比較をFig.11に示す。本実験系の場合、 B_{z0} が0.028Tより小さいところでは B_{z0} の増大に伴って鋳片表面の縞の間隔は小さくなっており磁場の印加は鋳片表面性状の改善につながることがわかる。なお、 B_{z0} が0.028T以上になると、湯面に乱れが発生し、メニスカスが不安定となり、鋳片は粗面となった。図に示すように実験値は計算値よりやや小さく、高磁束密度側に行くに従って実測値は計算値の約1/2まで低下するが、両者の傾向は類似していることがわかる。また、図中の丸印は鋳片の平均表面粗度を表す。鋳片表面の縞の間隔 E_m の減少に伴って表面性状が改善されることがわかる。すなわち、印加磁束密度を増大させることにより鋳片表面性状の改善を図ることができる。

4. 結言

高周波磁場印加下での溶湯表面波動の特性とメニスカス挙動および鋳片の表面性状との関連を実験によって求めた。さらに、溶湯プールの表面波の理論解析と鋳片表面の縞の間隔に及ぼす印加磁束密度の効果の理論解析を行った。以下に本研究で得られた結果を示す。

1) 溶湯の波動には表面静振波と横揺れが存在し、静振波はモールド壁を波の腹とする半波長の波である。また、表面静振波に及ぼす磁場の影響は小さい。

2) 溶湯波動の横揺れはメニスカスとモールドとの間欠接触状態を生み出し、溶湯上面の波動に連動している。

3) 湯面波動の振幅は電源周波数の増大に伴って減少し、湯面とコイルの相対位置によって大きく変化する。

4) 湯面波動の振幅の減少は鋳片の表面性状の改善につながる。鋳片表面の縞の間隔は(20)式で与えられ、鋳造速度に比例し、印加磁束密度に逆比例する。

5) 表面の縞の間隔 E_m の減少に伴って表面性状は改善される。すなわち、印加磁束密度を増大させることにより鋳片表面性状の改善を図ることができる。

記号

a : 表面静振波の振幅を表す(m), a_0 : 定数, A : (A-18)式を解いた時の積分定数で溶湯柱の横揺れの振幅を表す(m), b : 溶湯柱の幅(mm), B_{x0} : 平衡位置($z=0$)にある時の湯面での X 方向の磁束密度(T), B_{z0} : 溶湯柱が平衡位置($x=0$)にある時の溶湯柱表面の磁束密度(T), B_{z1} , B_{z2} : 溶湯柱の左右の磁束密度(Fig.10参照)(T), c : 静振波の伝播速度(m/s), d : 溶湯柱奥行き厚の厚み(m), E : 鋳片表面の縞の間隔(m), E_m : 磁場を印加した場合の鋳片表面の縞の間隔(m), f : 表面静振波の周波数(1/s), f_{mold} : 鋳型振動数(1/s), f_i : 溶湯と鋳型間の間欠接触の周波数(1/s), g : 重力加速度(m/s²), h : 溶湯プールの深さ(m), k : 波数(1/s), l : コイルと溶湯柱との間隔(m), L : 波長(m), m : モード定数, P : 湯面での圧力(Pa), P_0 : 大気圧(Pa), P_x : X 方向の磁気圧力(Pa), P_{x0} : 溶湯柱が平衡位置($x=0$)にある時の磁気圧力(Pa), P_{x1} , P_{x2} : 溶湯柱の左右の磁気圧力(Fig.10参照)(Pa), P_z : 湯面での Z 方向の磁気圧力(Pa), R : モールドの半径(m), S : 磁気圧力が作用する面積(m²), t : 時間(s), u : 溶湯の流速(m/s), u_x : X 方向の溶湯の流速(m/s), v : 鋳造速度(m/s), V : 溶湯柱の体積(m³), x : 溶湯柱の上面での X 方向への揺れ幅(m), x' : 溶湯柱の Z 方向の任意点における X 方向への揺れ幅(m), α : 比例定数($2\pi\sqrt{\mu\rho b l}$)(T), γ : 表面張力係数(N/m), δ : 磁場浸透深さ(m), η : 自由表面の位置(m), θ : 波数ベクトルと磁場のなす角(rad), μ : 透磁率(H/m), ρ : 密度(kg/m³), σ : 電気伝導度(S/m), ϕ : 速度ポテンシャル(m²/s), Φ : 磁束(Wb), ω : 角周波数(rad/s)

文 献

- 1) Ch. Vives and R. Ricou: Metall. Trans., **20B**(1989), p.623
- 2) 浅井滋生: 第129・130回西山記念技術講座(日本鉄鋼協会編), (1989), p.65
- 3) 鷺見郁宏, 佐々健介, 浅井滋生: 鉄と鋼, **78**(1992), p.447
- 4) 佐々健介, 李 廷挙, 浅井滋生: 鉄と鋼, **79**(1993), p.1075
- 5) 徳岡辰雄: 波動論, (1984), p.52[サイエンス社]
- 6) 日野幹雄: 流体力学, (1992), p.187[朝倉書店]
- 7) D. K. Stemple, E. N. Zulueta and M. C. Flemings: Metall. Trans., **13B**(1982), p.503
- 8) 竹内栄一, J. K. Brimacombe: 製鉄研究, (1987)324, p.59
- 9) M. Garnier and R. Moreau: Metall. Appl. of Magneto-hydrodynamics, London (1984), p.211 [The Metals Society]

付 録 1

(6)式での未知関数 $\phi(x, z)$ を X のみの未知関数 $X(x)$ と Z のみの未知関数 $Z(z)$ の積と仮定し,

$$\phi(x, z, t) = X(x)Z(z)e^{-i\omega t} \quad (\text{A-1})$$

とおく。(A-1)式の解は(A-2), (A-3)式で表される。

$$X(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} \quad (\text{A-2})$$

$$Z(z) = D_1 e^{khz} + D_2 e^{-khz} \quad (\text{A-3})$$

進行波のみを考えるならば, (A-2)式は $X(x) = C_1 e^{ikx}$ となる。

$$\text{境界条件: } \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \quad (\text{A-4})$$

より $D_1 e^{-kh} = D_2 e^{kh}$ の関係が得られる。したがって, $Z(z)$ は(A-5)式となる。

$$\begin{aligned} Z(z) &= D_1 e^{-kh} [e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}] \\ &= 2D_1 e^{-kh} \cosh\{k(z+h)\} \quad (\text{A-5}) \end{aligned}$$

(A-5)式を(A-1)式に代入し, その実数部をとると, (A-6)式となる。

$$\phi = D \cosh\{k(z+h)\} \cos(kx - \omega t) \quad (\text{A-6})$$

湯面上の流体素片は湯面下に潜り込むことはないとする, 湯面上では $d(z-\eta)/dt = 0$ でなければならないので, (A-7)式が得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = u_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (\text{A-7})$$

(A-6), (7)式を(A-7)式に代入すると, (A-8)式が得られる。

$$a\omega = Dk \sinh(kh) \quad (\text{A-8})$$

(A-8)式を(A-6)式に代入して, (8)式を得る。

付 録 2

溶湯柱が平衡位置にある状態をFig.10に破線で示す。このとき, 溶湯柱両側の磁気圧力は等しく(A-9)式の関係が成立する。

$$P_{x1} = P_{x2} = P_{x0} \quad (\text{A-9})$$

コイルと溶湯側面の距離 l の間に磁束 Φ が均一に保持されるとすると(A-10)式が得られる。

$$B_{z0} = \Phi / ld \quad (x=0) \quad (\text{A-10})$$

ここで, d : 溶湯柱奥行き(の厚み)である。

磁束 Φ は溶湯の振動にかかわらずほぼ一定と仮定すれば, 溶湯が X 方向に位置 $x'(z, t)$ 移動したとき, 溶湯左右の磁束密度 B_{z1} , B_{z2} は(A-11), (A-12)式で表される。

$$B_{z1} = \Phi / ((l-x')d) = B_{z0} l / (l-x') \quad (\text{A-11})$$

$$B_{z2} = B_{z0} l / (l+x') \quad (\text{A-12})$$

$x' \ll l$ として, (A-11), (A-12)式を x' に関してテイラー展開し, 2次以下の項を無視すると, (A-13), (A-14)式となる。

$$B_{z1} = B_{z0} (1 + x'/l) \quad (\text{A-13})$$

$$B_{z2} = B_{z0} (1 - x'/l) \quad (\text{A-14})$$

溶湯柱は Z 方向に対し, 線形的に偏移するものとして, その平均値を取ると, (A-13), (A-14)式は(A-15), (A-16)式となる。

$$B_{z1} = B_{z0} (1 + x/(2l)) \quad (\text{A-15})$$

$$B_{z2} = B_{z0} (1 - x/(2l)) \quad (\text{A-16})$$

一方, 磁気圧力は $P_x = B_{z0}^2 / 2\mu$ と書かれるので, 溶湯柱に作用する X 方向の圧力は(A-17)式で表される。

$$\begin{aligned} P_x &= P_{x1} - P_{x2} \\ &= \frac{B_{z0}^2}{2\mu} \left\{ \left(1 + \frac{x}{2l}\right)^2 - \left(1 - \frac{x}{2l}\right)^2 \right\} = \frac{B_{z0}^2 x}{\mu l} \quad (\text{A-17}) \end{aligned}$$

よって, 溶湯柱の運動方程式は(A-18)式となる。

$$\rho V \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{B_{z0}^2 x}{\mu l} S \quad (\text{A-18})$$

ここで, V : モールドと非接触に保たれる溶湯柱の体積, S : 磁気圧力が作用する溶湯柱の面積。また, 溶湯柱を直方体形状と近似すると $V = b d h = b S$ となり, この関係を(A-18)式に代入して, それを解くと(16)式と(17)式が得られる。