



粉体力学の現状

長 尾 高 明*

The Present Situation of the Mechanics of Granular Materials

Takaaki NAGAO

1. ま え が き

最近にわかに粉体が脚光を浴びているようだ。これは、ひつきよう新素材としてのセラミックスなどに対する社会的ニーズが大きくなったせいであろう。しかし、粉体は必ずしもセラミックス原料のみとは限らない。太古から粉体は人間の生活に欠かすことのできない材料であつたし、今でもそうである。古代の土器の製作、土木工事から始まつて、パンや穀物、顔料、れんが、ガラス等々皆そうである。鉄鉱石、薬品触媒、肥料、石炭等、枚挙に暇がない。

たとえば、日本では海外から年間約 2400 万 t の穀物を輸入しているが、穀物の見掛けの比重はおよそ鉄の 1/10 なので、その体積はおよそ 2.4 億 t の鉄に相当する。これは日本の鉄の年間生産量の約 2.4 倍である。また、製鉄所に行つても、鉄鉱石、石炭、石灰等の原料は粉体であり、ヤードから高炉までは粉体で埋まつている。

これらの諸材料を扱うのに、日々それなりの作業を行うための手段やプロセスの必要に迫られるはずであるが、それが何とか済んでいるから不思議である。しかし、これらを力学的に正しく取り扱う必要があり、それができていないための不便も無駄も相当多いはずである。粉体力学は、この無駄をなくし、正しく製品や機械を設計し、取り扱うために、粉体の挙動を明らかにするのが目的であるが、今のところまだ断片的知識の寄せ集めの段階から、ようやく抜け出し、体系立つてこうとしているのが現状であろう。そこで、粉体力学の現状について述べる。

粉体力学と言つても今のところ明確な定義があるわけではないが、大別すれば粉体の圧縮・変形に関する力学、流れに関する力学及びそれ以外に分けられるだろう。筆者が関わっているのは、それらの中で圧縮・変形に関するものだけであるから、ここでの話もその部分に限定す

ることにする。

2. 粉体と一般連続体との相違点

ここで粉体と一般の連続体（固体や流体）との相違点について考えておくのもむだではなからう。

まず相違点の第 1 は、自由表面についてである。固体は与えられた形状によつて定まり、液体は等ポテンシャル面によつて定まるが、粉体はある条件付きで自由に変えられることである。たとえば、重力下での粉体の堆積状態を考えると、表面の傾斜角が安息角以下ならば、どのような形にでも変えられる。(Fig. 1) もちろん、液体は重力下では水平面しか作らないし、固体の表面は加工すればいかようにでもなるが、加工しなければその形状を保つ。

相違点の第 2 は応力の伝わり方である。液体の場合は御承知のように、その一部に静圧を加えると、その圧力はパスカルの原理によりどこまでも伝わつてゆく。固体の場合は、これに対し、その物質を構成する原子や分子を通じて応力が伝わつてゆくが、その際隣り合つた原子や分子同士の間には剪断応力を生じるので、応力はだんだんと拡散してゆくことになる。(Fig. 2)

粉体の場合は固体の場合と似ているが、その応力の伝わり方は、粒子同士の接触部を通じて、粒子間力の形で伝わる点で異なっている。従つて、粉体の場合の応力というのは、単位面積内の粒子間力の和であり、固体の場合や液体の場合の応力とは意味が異なる。だから、粉体



Fig. 1. Free surface of granular material. It can be changed in any profile under the condition that the angle of inclination of surface is smaller than the angle of repose.

昭和 61 年 11 月 20 日受付 (Received Nov. 20, 1986) (依頼解説)

* 東京大学工学部教授 工博 (Faculty of Engineering, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo Bunkyo-ku Tokyo 113)

Key words: state of art; granulation; compression; deformation; fracture; stress transfer; friction; plasticity; finite-element method; mathematical model.

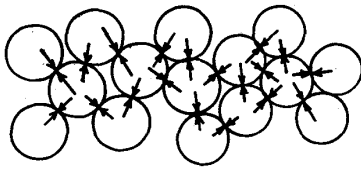


Fig. 2. Propagation of stress in granular material.

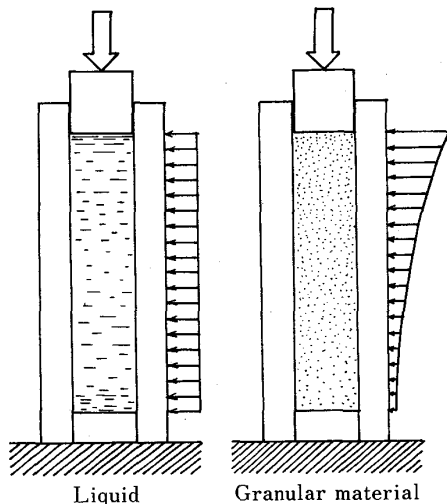


Fig. 3. Compression of liquid and granular material. Pressure propagates uniformly through liquid, while it propagates decreasingly through granular material.

の場合、隣り合った粒子同士の間には剪断力を生じるので、固体の場合と同様に応力は拡散して伝わってゆく。たとえば Fig. 3 のようにシリンダー内に液体と粉体とをつめて圧縮した場合、液体はすみずみまで圧力が一様に伝わるが、粉体の場合、上からかけた圧力は壁面に摩擦で伝わって、減衰してしまい、底面の粉体はほとんど圧縮されない。

相違点の第3は、破壊条件である。液体では破壊ということはないが、固体の場合は破壊条件として、TRESCAの降伏条件とか、von MISESの降伏条件が普通である。しかし、粉体の場合は一般に $\tau = k\sigma$ の形の MOHR-COULOMB の破壊条件に従う。つまり、この条件を満たす場合に粒子間に大きいむり（崩壊ともいう）を生じて、大きく変形することになる。(Fig. 4)

相違点の第4は、圧縮によって見掛けの密度が変化するという点である。固体や液体もちろん圧力下で体積変化するが、それはごくわずかで、塑性の場合は固体の体積変化はないことと信じられている。気体はもちろん圧縮性であるが、これは気体分子がもともと希薄に分散しているためである。しかし、粉体の場合の体積変化は、ごくふわりと充填されているような微粒子の場

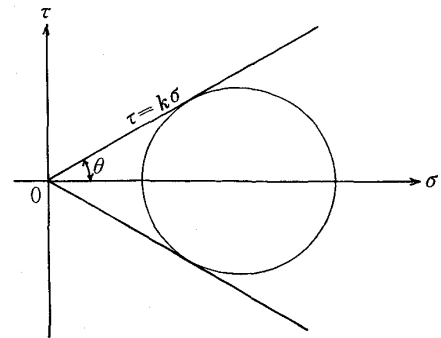


Fig. 4. Yield locus for granular material. (MOHR-COULOMB failure envelope)

合は、粒子が位置変化して、そのために密度が高くなるのであるが、十分充填されているような数 $10\ \mu\text{m}$ 以上の粒子は、その接触部の変形による充填が、密度変化の主たる要因である。

その他粉体特有の現象はいろいろある。たとえば振動あるいは空気圧で浮かした場合の流動現象とか、偏析現象（粉子の大小、成分の相違等による）などは重要なものである。また、ダイラタンシーも粒子系特有であろう。応力緩和やクリープ現象はむしろ固体と共通のものである。磁気や温度や振動に対する挙動も粉体独特のものがある。これらを挙げれば枚挙に暇がない。

しかし、粉体力学の骨子から見れば、まず上記四つの相違点が主要なものと言えるであろう。

3. 歴史的展望

近代的な意味で土が力学的対象として取り扱われたのは、おそらく COULOMB¹⁾ (1776) によつて土の降伏条件が提案されたのが最初であろう。この論文は土圧に関する研究において画期的なものであり、その考察法は今日でも土質力学において用いられている。RANKINE²⁾ (1857) は、独創的な土圧論を発表し、土の微小部分の平衡を論じた。BOUSSINESQ³⁾ (1876) は土に対して応力と歪みとの関係を導入した。TERZAGHI⁴⁾ (1925) は、Erdbaumechanik を著し、土質力学を確立した。以来、土質力学はおおいに発展したが、これらは粉粒体を特に対象としたものではなかつた。SOKOLOVSKI⁵⁾ らの研究は塑性学的取扱いに分類されるが、これも極限状態における応力のつりあいを論じたものに限られている。

最初に粉体の容器内での挙動を論じたのは JANSSEN⁶⁾ (1895) によるものであろう。(Fig. 5)

彼はこの論文において、サイロ内の小麦の貯蔵の問題を論じ、サイロ内の小麦に作用する応力が、

$$p = \frac{S\gamma}{4K} \left\{ 1 - \exp\left(-4K \frac{x}{S}\right) \right\} \dots\dots\dots (1)$$

の形で表されることを理論的に導き、実験的に証明した。

ここで,

x : 穀物の上面からの深さ

S : サイロ (四角) 断面の一辺の長さ

$K := p_s \cdot f / p$

p_s : サイロ側面圧

p : 垂直応力

f : サイロ壁面と穀物との摩擦係数

γ : 穀物の比重量

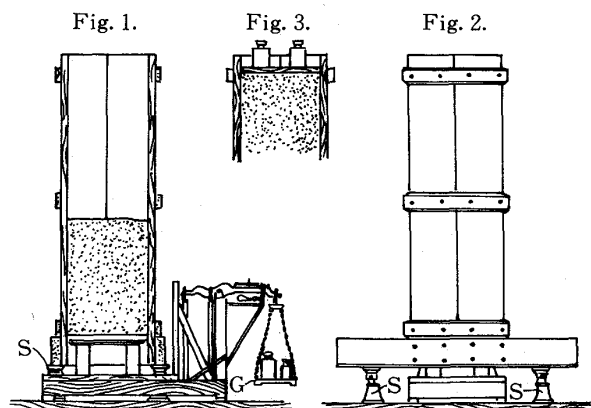


Fig. 5. Janssen's experiment of silo. (c. f. ref. (6))

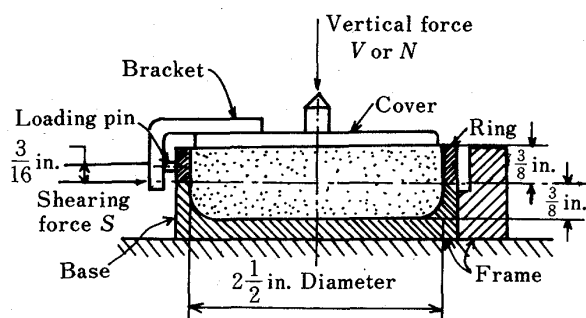


Fig. 6. Jenike's apparatus of shearing of granular material. (c. f. ref. (7)).

である。この関係は JANSSEN の応力分布と称し、いまでも粉体力学における基本式の一つとして扱われている。

JENIKE⁷⁾らは、粉粒体貯槽装置の設計のため、一面剪断装置 (Fig. 6) を用いて、粉体の物性を研究し、粉体層崩壊曲線 (Power yield locus) の考えを導入した。

RUMPF^{8)~10)}は、引張応力 σ と粒子間付着力 P との関係が次式で表せることを理論的に導いた。

$$\sigma = \frac{1-\varepsilon}{\pi} k \frac{P}{d^2} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 ε は空隙率、 k は一つの粒子まわりの粒子配位数、 d は粒子直径である。

長尾¹¹⁾は、RUMPF とは独立に、一般的に応力と粒子間力との関係を求めた。すなわち、粒子まわりの力の分布が応力の楕円体分布と相似な楕円体分布 (Fig. 7) であることを仮定して、主応力 σ_j と粒子まわりの力の楕円体分布の極値 P_j との間に

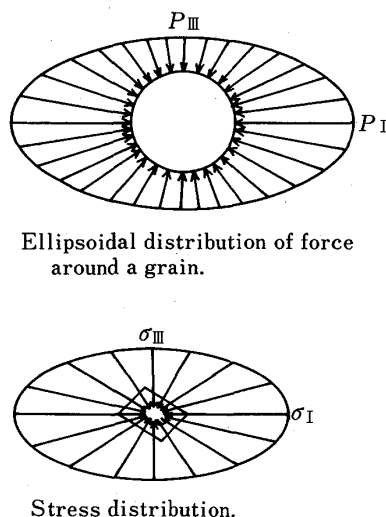


Fig. 7. Ellipsoidal distribution of force around a grain and stress distribution.

Table 1. Empirical relationships on powder compression (from ref. (12)).

Author	Equation	Remarks
Balshin	$\ln P = -L \cdot V_r + C$	P =pressure, V_r =specific volume, L , C =constants
Smith	$\rho - \rho_0 = C_f \cdot P^{1/3}$	ρ =density, ρ_0 =initial density, C_f =compressibility factor
Murray	$\ln \left(\frac{1}{1-D_E} \right) = \frac{\sqrt{2\gamma n^{1/3}}}{\sigma_0} \left(\frac{D_E}{1-D_E} \right)^{1/3} \times \frac{4\pi^{1/3}}{3} + \frac{P}{\sqrt{2}\sigma_0}$	D_E =relative density at pressure P , γ =surface tension, n =number of pores in unit volume, σ_0 =yield strength at compressing temperature
Ballhausen	$\ln \left(\frac{D}{1-D} \right) \propto P$	D =relative density at pressure P
Konopicky	$\ln \left(\frac{1}{1-D} \right) = kP + \ln \left(\frac{1}{1-D_0} \right)$	D =relative density at pressure P , D_0 =relative density at zero pressure, k =constant
Athy	$n = n_0 \cdot \exp(-bx)$	n =porosity, n_0 =average porosity of surface clays, b =constant, x =depth of burial
Nutting	$\varepsilon = \psi^{-1} t^k f^\beta$	ε =volumetric strain, f =compressive stress, t =time, ψ , β , k =constants
Tanimoto	$\delta = \frac{1-\mu}{E} \sigma + \frac{\sigma \varepsilon_m + A \varepsilon_0}{\sigma + A}$	δ =change of volume, E =elastic factor, σ =compressive stress, ε_m =initial void, ε_0 =strain at initial state, μ , A =constants
Terzaghi	$\varepsilon = -\alpha \ln(P + P_c) - \beta(P + P_c) - \gamma P + C$	ε =ratio of porosity, P_c =constant at initial packing, α , β , γ , C =constants
Kawakita	$C = \frac{abP}{1+bP}$	P =pressure, C =relative reduction of volume, a , b =constants

$$P_j = \frac{3\sigma_j}{2r\Lambda} \quad (3)$$

の関係があることを見出した。ここに r は粒子の平均半径、 Λ は単位体積内の接触点数である。この関係は RUMPF の関係を包含し、広く一般的に応力を粒子間力と関連づけることのできる式である。

この他、充填、付着、凝集、流動、振動、伝熱等の分野でも多くの研究がある。また、以上の展望でもごく大ざっぱに眺めただけであり、ここに述べられていない多くの優れた研究があることは論をまたない。

圧縮についても Table 1¹²⁾ に挙げるように、多くの報告がある。しかし、その大部分は経験式あるいは半理論式である。これらの式は、それぞれ実験条件も試料も異なるため、一般的な適用性に欠けている。

このように、多くの研究はあるが、多くは個々の現象に関する実験事実ないしはその解釈にすぎない。しかし、知識を用いて応用するためには、知識の体系化が必要であり、粉体力学の場合は特にしかりである。同じ研究を行うにしても、体系化の観点があるか否かで着眼、ねらい、方法が全く違ってくる。そこで、次に筆者の研究を中心に、粉体力学の体系化の試みについて次に説明しよう。

4. 粉体力学の体系化の試み

粉体の系を力学的に取り扱うために必要な基礎方程式としては、応力のつりあい式、モーメントのつりあい式、連続の式、幾何学的関係式、構成方程式等がある。これらは、粒子同士の力等のバランスや、幾何学的関係、接触点における力と変形量との関係等から導びかれる。その際、マクロに見た応力とミクロに見た粒子間力の関係が必要となる。

4.1 応力のつりあい式とモーメントのつりあい式¹³⁾

応力を (σ_{ij}) 、物体力を (B_j) 、粉体の真密度を ρ_p 、空隙率を P 、速度を (V_j) とすると、応力のつりあい式は次の形に表される。

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + B_j = \frac{D}{Dt} \{ \rho_p (1-P) V_j \} \quad (j=1, 2, 3) \quad (4)$$

重力の働く場では

$$B_3 = -\rho_p g (1-P) \quad (5)$$

となる。ただし

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + \sum_{i=1}^3 V_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (6)$$

である。モーメントのつりあい式は

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3) \quad (7)$$

と表される。式 (4) は、弾・塑性学での変形量の多い場合の応力のつりあい式と同じである。

4.2 連続の式と幾何学的関係式¹³⁾

連続の式は次のように表される。

$$\frac{DP}{Dt} = (1-P) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \quad (8)$$

この関係は、普通の連続体（非圧縮性流体や塑性体）ならば左辺が 0 となる。しかし、粉体においては、圧縮時に空隙率 P が変化し、見掛けの体積変化があるので、一般には左辺は 0 にならない。幾何学的関係式というのは粉体独特のものであり、主として粒子の空間的配列による空隙率 P と、単位体積内の接触点の数 Λ との関係を示している。Fig. 8 は、縦軸に $1-P$ 、横軸に $\lambda = r^3 \Lambda$ (r は粒子の平均半径) をとつたものであるが、等大球を充填した場合の値と、SMITH らの実験¹⁴⁾ による値をプロットしてある。この関係を数式で示せば、実用範囲では、

$$1-P = 0.727 \lambda^{1/3} \{ 1 + K (b_m / r) (r^2 \sigma / \lambda)^{1/m} \} \quad (9)$$

と表せる。ここに K は定数であり、 $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ であり、 m と b_m は後述の指数および定数である。いまのところ、 K の値はよくわかっていない。なお、この関係については、配位数と空隙率との関係ということで、多くの研究者によりいろいろの関係が求められている¹⁵⁾。

4.3 構成方程式（応力ひずみ関係式）

粉体の構成方程式を求める場合、粒子同士の接触による局部変形、粒子本体の変形および粒子の並進、回転を考えなければならない。まず、粒子同士の接触による局部変形には粒子の表面の状態が問題となる。その状態を Fig. 9 のような代表的な三つの状態、すなわち球と球との接触の状態（モデル 1）、球のまわりに凹凸がある粒子同士の接触の状態（モデル 2）、球のまわりの大凹凸のまわりに小凹凸がある粒子同士の接触の状態（モデル 3）に分けて考える。このとき w を接触面中心の垂直変位、 P を接触面に働く力の垂直成分とすれば、 w と P との関係は、

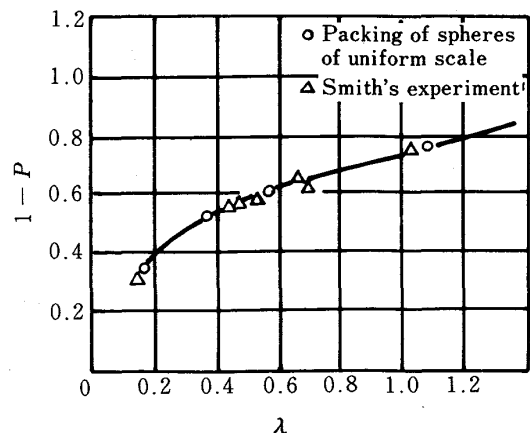


Fig. 8. Relationship between porosity p and non-dimensional number of contact λ ($\lambda = r^3 \Lambda$, where r denotes the mean radius of grains and Λ the number of contact in unit volume).

Table 2. Intergrain Interactions.

Model	Property	m	b_m	Remarks
Model 1	Elastic	3/2	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{9\pi^2 \mu^2}{8r}}$	P_m : Yielding pressure r : Mean radius of particles $\mu = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$
	Plastic	1	$\frac{1}{2\pi r P_m}$	
Model 2	Elastic asperities	5/2	$\frac{1}{2r} \left(\frac{15\mu r}{2N(8R/r)^{1/2}} \right)^{1/2}$	Linner deformations neglected N : Number of asperities per unit area R : Radius of curvature of asperities
	Plastic asperities	2	$\frac{1}{2r} \left(\frac{2r}{\pi^2 N R P_m} \right)^{1/2}$	
Model 3	Plastic small asperities	3	$\frac{1}{2r} \left(\frac{6r^2}{\pi^3 N N' R R' P_m} \right)^{1/2}$	Deformations of large asperities and inner parts neglected

N' : Number of large asperities per unit area
 R' : Radius of curvature of large asperities

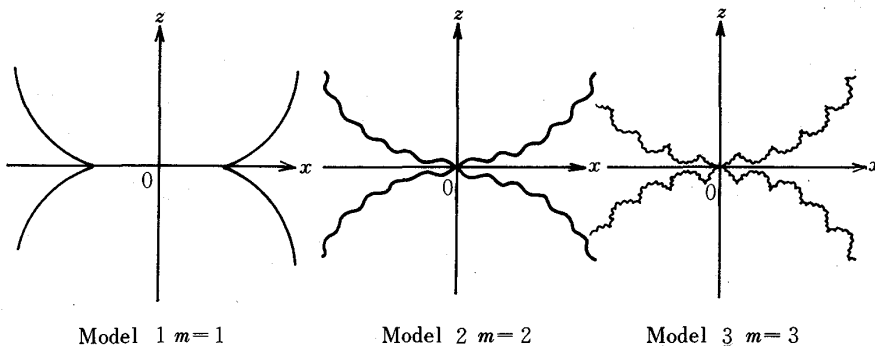


Fig. 9. States of grain contact.

$$w = b_m P^{1/m} \dots \dots \dots (10)$$

と与えられる¹⁶⁾. ここに b_m , m は Table 3 で与えられる.

ここに r は粒子の平均半径, P_m は粒子材料の降伏圧力, E はヤング率, ν はポアソン比, n , R は大凹凸の面積密度と曲率半径, n' , R' は小凹凸の面積密度と曲率半径を表す. ふつうの粒子では, 接触部は塑性変形するので, 荷重が小さい場合 $m=3$, 荷重が大きくなると, $m=2$, $m=1$ と進む.

一方, 粒子間の力 $P_{kl} = (P_{kl})^J$ と主応力 $\sigma = (\sigma_J)$ ($J = \text{I, II, III}$; 主応力方向) との関係は, 粒子球面上ですべりが生じない場合は次のように表される¹¹⁾.

$$\left. \begin{aligned} P_{kl}^J &= P_J \cos \eta_J \\ P_J &= 3\sigma_J / (2r\Lambda) = 3r^2 \sigma_J / (2\lambda) \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

ここに η_J は粒子中心と接触点とを結ぶ方向 $\overline{OR}$ が主応力方向 J となす角を表す. 一般座標軸 i と主応力軸 J とのなす角を α_{iJ} とすると σ_{ij} は次のようにして求められる.

$$\sigma_{ij} = \sum_J \sigma_J \cos \alpha_{jJ} \cos \alpha_{iJ} \quad (i, j = 1, 2, 3; J = \text{I, II, III}) \dots \dots (12)$$

粒子表面同士の摩擦係数を $k = \tan \theta$ とすると,

$(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}}) / (\sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{III}}) > \sin \theta$ のときはすべりが生じる.

このときは, 粒子中心と接触点とを結ぶ方向 $\overline{OR}$ と P_{kl} とのなす角 φ が

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \sum_J \sum_K (P_J - P_K)^2 \cos^2 \eta_J \cos^2 \eta_K /$$

$$c \sum_J P_J^2 \cos^2 \eta_J \geq \sin^2 \theta \dots \dots \dots (13)$$

となる粒子球面上の範囲 Σ' ですべりが生じ, その他の範囲 Σ ではすべりが生じない. この場合, σ と P_{kl} との関係は,

$$\left. \begin{aligned} P_{kl}^J &= P_J \cos \eta_J \quad (\Sigma \text{ 内で}) \\ P_{kl}^J &= P_J \cos \eta_J \\ &+ (P \cos \varphi - P_J)(1 - k \cot \varphi) \cos \eta_J \\ \sigma_J &= (2r\Lambda/3) P_J \\ &- (r\Lambda/2\pi) \sum_K (P_J - P_K) J_{JK} \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$

$$J_{JK} = \int_{\Sigma'} (1 - k \cot \varphi) \cos^2 \eta_J \cos^2 \eta_K d\Omega$$

と表される¹⁷⁾. これらをもとにして, 構成方程式が次のように得られる¹⁸⁾.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_J}{\partial x_J} &\approx - \frac{3}{4\pi} \frac{b_m}{r} \left[\dot{P}_J \bar{J}_J \right. \\ &+ \sum_M \dot{P}_M \left(\frac{1}{m} - 1 \right) P_J \bar{J}_{JM}^2 \\ &+ \sum_{M,N} \Sigma (P_N - P_M) P_M \dot{P}_N (\alpha/m) P_J \bar{J}_{JMN}^4 \left. \right] \dots \dots (15) \end{aligned}$$

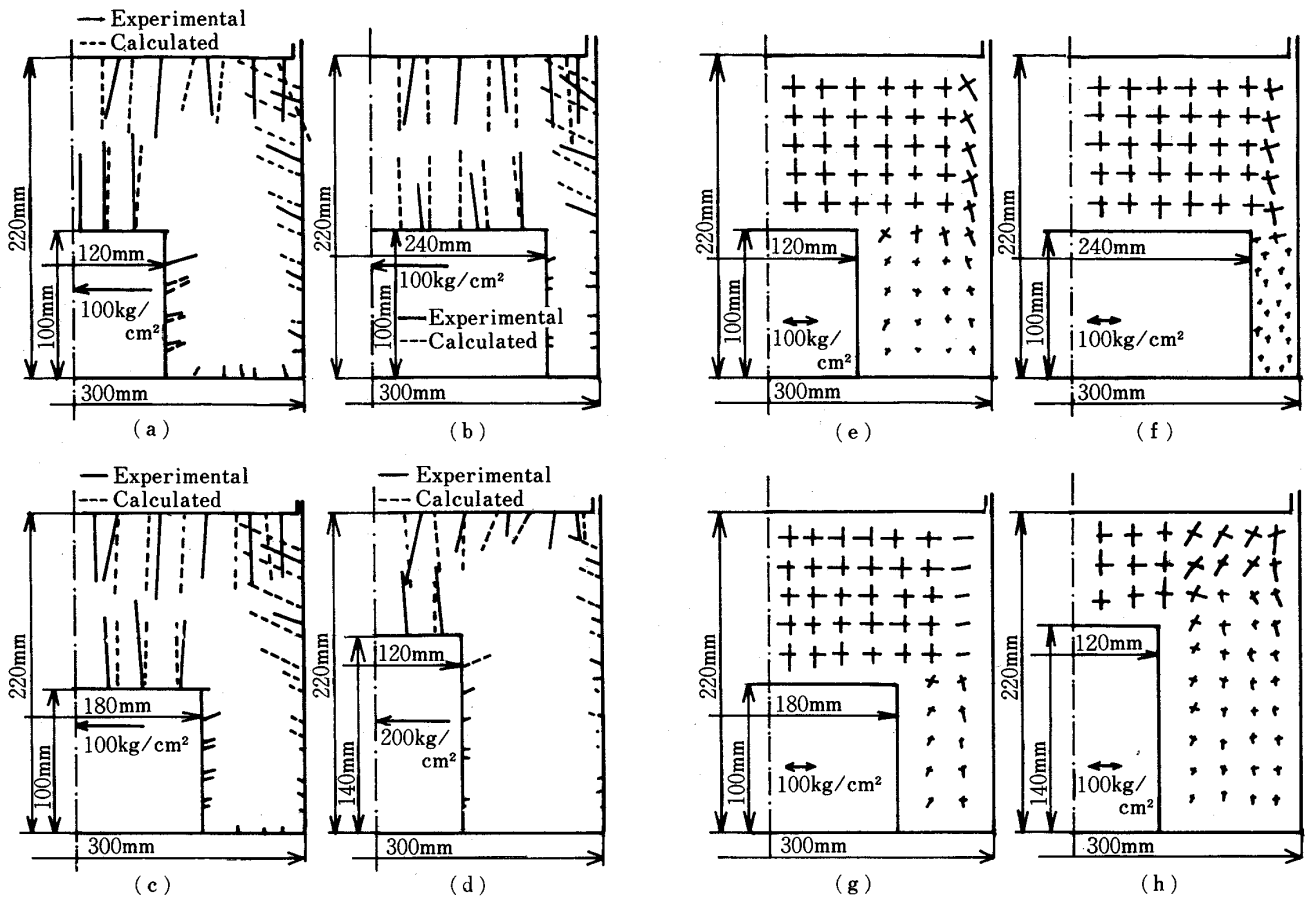
$$\frac{\partial V_J}{\partial x_K} \approx - \dot{w}_L \dots \dots \dots (16)$$

$$\frac{\partial V_K}{\partial x_J} \approx \dot{w}_L \dots \dots \dots (17)$$

ただし $(J, K, L) = (\text{I, II, III}), (\text{II, III, I}), (\text{III, I, II})$

$\dot{w}_L$ は粒子の平均回転角速度を示す.

ここに,



(a) to (d) Resultant stress distributions on the surface of the box (Silica sands are compressed under the mean pressure of 100 kg/cm² on the lower surface of punch)

(e) to (h) Calculated internal principal stress distribution within the box with a rectangular pattern (Silica sands, mean pressure 100 kg/cm²)

Fig. 10. Comparison of experimental results and solutions by FEM.

$$\bar{J}'_J = \int_{\Sigma} (P \cos \varphi)^{1/m-1} (1 + \alpha \tan^2 \varphi)^{1/2m} \cos^2 \eta_J d\Omega \quad (18)$$

$$\bar{J}^2_{JM} = \int_{\Sigma} (P \cos \varphi)^{1/m-2} (1 + \alpha \tan^2 \varphi)^{1/2m} \cos^2 \eta_J \cos^2 \eta_M d\Omega \quad (19)$$

$$\bar{J}^4_{JMN} = \int_{\Sigma} (P \cos \varphi)^{1/m-4} (1 + \alpha \tan^2 \varphi)^{1/2m-1} \cos^2 \eta_J \cos^2 \eta_M \cos^2 \eta_N d\Omega \quad (20)$$

$$P \cos \varphi = (\sum_j P_j \cos^2 \eta_j)^{1/2} \quad (21)$$

$$\dot{P}_j = \frac{DP_j}{Dt} \quad (21)$$

とおいた。一般座標系でのひずみ速度との変換は、次の式で与えられる。

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \sum_{j,k} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \cos \alpha_{ij} \cos \alpha_{jk} \quad (22)$$

4.4 有限要素法による解法¹⁹⁾

以上の基礎方程式を用いて、有限要素法で解いた例を Fig. 10 に示す。これは、粉体圧縮槽 (300 mm×300 mm

×270 mm) の中にけい砂 (平均粒径 0.183 mm, 内部摩擦係数 0.674) を入れて、圧縮蓋の上から平均面圧 10 MPa の圧力を加えた場合の応力分布を有限要素法で解き、実験結果と比較したものである。このときの壁面圧と内部応力の分布を示してある。この場合 $bm = 5.57 \times 10^{-4} \text{ cm/N}^{1/3}$, $m = 3$ としている。このように、まだ理論は十分でないが、一応満足に行く結果が得られている。

4.5 その他の関係

以上の体系化の他に、除荷²⁰⁾ 再負荷の場合、粒子間に付着力が働く場合²¹⁾ 等についても体系化されている。その他、振動²²⁾ 磁場でのふるまい²³⁾ 等についても一応考えられている。

このように、理論的には一応体系化を終えたが、これらを用いて行つた計算事例、理論解例がまだほとんどない状況にある。これらは、早急に事例を増さなければならぬと考えている。

5. あとがき

以上に述べたように、粉体力学として体系化できたと

ころはまだほんの骨格といったところであり、十分に使える状態とは言いがたい。特に構成方程式の部分は複雑なので問題が多い。実用的にはこの部分には塑性学の手法を流用するのがよいのかも知れない。

また、粒径が $1\ \mu\text{m}$ 以下位の粒子の場合は、凝集して数十 μm になることが多いが、凝集しない状態での取扱いは以上述べた体系では不十分であり、幾何学的関係式、構成方程式などを考え直す必要があるだろう。特に、相互作用が電氣的な力になるような微粒子の扱いは問題が多い。また、上記体系では粒子形状が大体球状に限られていたが、実際には細長いとか平らな異形状のものも多い。これらの取扱いはまったく異なる。

これらについても体系化を試みることは今後の重要な課題である。

文 献

- 1) C. A. COULOMB: Essai sur use Application des Règles des Maximis et Minimis à quelques Problèmes de Statique Relatifs à l'Architecture, Mém. acad. roy. Prés. divers savants, Paris, 7 (1776)
- 2) W. J. M. RANKINE: On the Stability of Loose Earth. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. 147 (1857)
- 3) Boussinesq: Essai Théorique sur L'équilibre des massifs pulvérulents (1876)
- 4) Terzaghi: Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage (1925)
- 5) V. V. SOKOLOVSKI: Statics of Granular Media, Pergamon Press Oxford (1965)
- 6) H. A. JANSSEN: VDI Zeitschrift, 39 (1895), p. 1045
- 7) A. W. JENIKE, P. J. ELSEY and R. H. WOOLLEY: Proc. Am. Soc. Test. Mat., 60 (1960), p. 1168
- 8) H. RUMPF: Chem. Ing. Tech., 30 (1958), p. 144
- 9) W. RIETSCH and H. RUMPF: Chem. Ing. Tech., 39 (1967), p. 885
- 10) H. RUMPF: Chem. Ing. Tech., 42 (1970), p. 538
- 11) 長尾高明: 日本機械学会論文集, 43 (1977), p. 4038
- 12) K. KAWAKITA and Y. TSUTSUMI: Japan J. Appl. Phys., 4 (1965), p. 56
- 13) 長尾高明: 日本機械学会論文集, 33 (1967), p. 229
- 14) W. O. SMITH P. D. FOOTE and P. F. BUSANG: Phys. Rev., 34 (1929), p. 1271
- 15) 粉体工学便覧 (粉体工学会編) (1986), p. 104 [日刊工業]
- 16) 長尾高明: 日本機械学会論文集, 34 (1968), p. 100
- 17) 長尾高明: 日本機械学会論文集, 44 (1978), p. 1912
- 18) 長尾高明: 日本機械学会論文集, 44 (1978), p. 2967
- 19) 長尾高明, 片山正一郎: 日本機械学会論文集, 46 (1980), p. 355
- 20) 長尾高明: 日本機械学会論文集, 47 (1981), p. 1363
- 21) 長尾高明: 粉体工学会誌, 23 (1986), p. 240
- 22) 長尾高明: 未発表
- 23) 長尾高明: 未発表