621.785.616: 517.949: 66.045.5

'80－S 317

(289) 差分方程式による冷却曲線の導出

山口大学 教育学部 ○時弘義雄
京都大学 工学部 工博 田村今男

1．緒言　焼入れの際の試片冷却はニュートン冷却のような単純なものではなく，きわめて複雑な挙動をすることはよく知られたことである。これを解析的に求めるため，熱伝達率を試片表面温度，冷却剤温度等の関数として熱伝導方程式に代入しようとする試みが広くおこなわれている。しかしそれらの試みはいずれも特定の寸法，形状の試片に対するものであり，熱伝達率が冷却剤温度，試片形状および寸法等とともにどのように変化するかについて系統的に求めた報告はほとんどみないようである。そこで熱伝達率を試片温度および冷却剤温度の関数として表わし，実測冷却曲線と対比させることによりその関数形を定め，これを用いて各種冷却剤の冷却曲線を有限差分法によって計算し，試片寸法，形状等と熱伝達率との関係について検討をおこなった。

2．計算に用いた差分方程式　計算に用いた試片形状は円柱，球，四角柱で，使用した記号はつぎのようである。t：冷却時間，R：試片半径，r：中心からの距離，θ_0：焼入温度，θ_c：冷却剤温度，θ：rの位置における試片温度，a：熱拡散率，h：相対熱伝達率，$r/R=x$，$(\theta-\theta_c)/(\theta_0-\theta_c)=u$　円柱の熱伝導微分方程式は，円周方向に均一に冷却されるとするとつぎのようである。$\frac{\partial\theta}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)$，初期条件：$\theta_{t=0}=\theta_0$，境界条件：$\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_{r=R}=-h\,\theta_{r=R}$，これらの式を$x$，$u$を用いて書き直すと，熱伝導微分方程式は

$$\frac{R^2}{a}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

，初期条件は $t=0$ ですべての x について $u=1$，境界条件は

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=0,\quad \left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=1}=(-hR)_{x=1}$$

いま　$x=i\delta x$，$n\delta x=1$　として　Crank-Nicolson 法で差分方程式になおす。ここに $t=j\delta t$ である。

$$\frac{R^2}{a}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\delta t}=\frac{1}{2(\delta x)^2}\Big\{\left(1+\frac{1}{2i}\right)u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+\left(1-\frac{1}{2i}\right)u_{i-1,j+1}+\left(1+\frac{1}{2i}\right)u_{i+1,j}-2u_{i,j}+\left(1-\frac{1}{2i}\right)u_{i-1,j}\Big\}$$

中心においては

$$\frac{R^2}{a}\frac{u_{0,j+1}-u_{0,j}}{\delta t}=\frac{2}{(\delta x)^2}\left(u_{1,j+1}-u_{0,j+1}+u_{1,j}-u_{0,j}\right)$$

境界においては

$$\frac{R^2}{a}\frac{u_{n,j+1}-u_{n,j}}{\delta t}=\frac{1}{(\delta x)^2}\Big[-\Big\{1+\left(\frac{1}{2n}+1\right)\cdot\delta x\cdot(hR)_{n,j+1}\Big\}u_{n,j+1}+u_{n-1,j+1}-\Big\{1+\left(\frac{1}{2n}+1\right)\cdot\delta x\cdot(hR)_{n,j}\Big\}u_{n,j}+u_{n-1,j}\Big]$$

球，四角柱に対しても同様な手段により差分方程式を定めた。

3．計算結果　上式における相対熱伝達率hを，焼入試片中心部および冷却剤温度の関数として，その関数形をいろいろの冷却剤に対して定めた。その結果この $h=f(u)$ の式は，同一冷却剤に対しては冷却剤温度，試片形状，試片寸法等に対して無関係に同一の式を用いても，実用上差支えないことが判明した。

4．導出冷却曲線の応用　このようにして導出した冷却曲線とTTT曲線に additivity rule を適用することによりその鋼の変態開始曲線が求められる。この変態開始曲線と導出冷却曲線を重ねれば，その鋼をその冷却剤に焼入れたときの99％マルテンサイトの臨界直径が求められる。このような方法で求めた結果を2，3の冷却剤および鋼種について述べる。