技術資料

UDC 621.77.016.3 : 539.62 : 621.892

冷間圧延における潤滑の最近の理論と進歩*

小豆島 明**

Recent Development and Theory of Lubrication in Cold Sheet Rolling

Akira AZUSHIMA

1. 緒言

薄板の冷間圧延において，ロールと圧延材料間の潤滑状態が圧延荷重のような力学的特性及び圧延後の材料の表面性状に大きな影響を及ぼすことは古くから知られていることである．

潤滑問題の力学的な面は圧延理論式とともに発展してきており，ロールと圧延材料間の潤滑状況は，ロールと圧延材料間のせん断応力にクーロンの法則が成り立つとして導出された圧延理論式を用いて圧延荷重から逆算した摩擦係数によりその推定が行われてきている．しかしロールと圧延材料間の接触面上でクーロンの法則が成り立つ保障もなく，圧延速度が高速になり流体潤滑状況が優勢になつた段階では，流体潤滑理論を展開してロールと圧延材料間の界面現象の解析を行う必要性も生じてきている．

また，実際の圧延作業を見ると，完全に界面を流体潤滑領域としてとらえるにはかなり問題もあり，流体潤滑と境界潤滑が混在する混合潤滑についての理論を展開しなければならない．

以上の観点から本稿では，圧延荷重から摩擦係数を逆算した最近の報告を紹介するとともに，ロールと圧延材料間の接触面上での圧力分布についても調べ，界面での摩擦法則についての検討を加える．また，最近の流体潤滑理論を用いてロールと圧延材料間の界面現象を解析した文献を2，3紹介する．

つづいて，流体潤滑理論の基礎式を導出し，その基礎式を用いて入口部の油膜厚み及びロールと圧延材料間のせん断応力の解析を行うとともに，実際の圧延作業のロールと圧延材料間の界面現象に近い混合潤滑に関しても試論を展開し，それらの潤滑理論の実際の応用への可能性についての検討を加えてみた．

2. 圧延における潤滑

2·1 圧延潤滑の摩擦係数に関する研究

圧延加工とは2円筒のロールの回転によつて圧延材料の板厚を減少させる加工方法で，実際には古くから行われてきた．ロールバイト中の圧延材料の変形の力学的な解析が試みられたのは 1925 年の *von* KARMAN[1] に始まるが，その後 OROWAN[2], BLAND & FORD[3]及び SIMS[4] らにより圧延理論式が導出された．彼らはロールバイト中の圧延材料をスラブに分割し，そのスラブでの力の釣合方程式と降伏条件式によつて微分方程式を導出している．

von KARMAN[1] は図1に示すように，ロールバイト中の圧延材料の変形領域での一つのスラブに作用する力の水平方向の分力は，ロール面に垂直な応力 P_r の水平方向の分力と材料の表面に作用する摩擦力 μP_r の水平方向の分力の和であるとし，水平方向の応力 q に関する平衡方程式，いわゆる KARMAN の微分方程式を導いている．

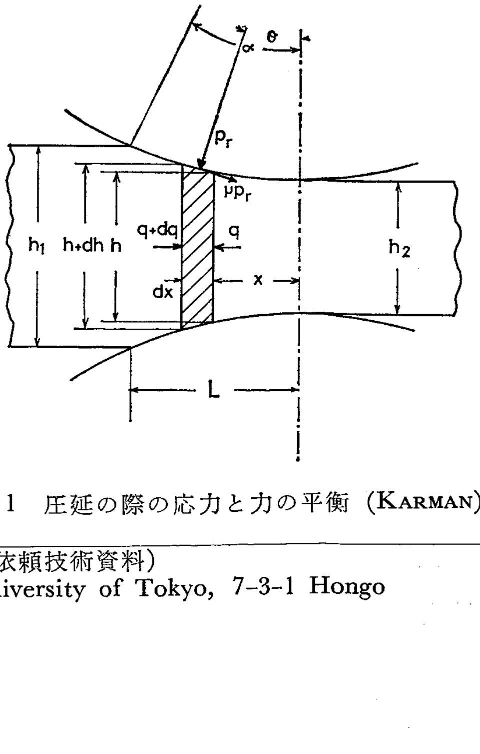


図 1 圧延の際の応力と力の平衡 (KARMAN)[1]

* 昭和 52 年6月 30 日受付 (Received June 30, 1977) (依頼技術資料)
** 東京大学工学部 工博 (Faculty of Engineering, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo Bunkyo-ku 113)

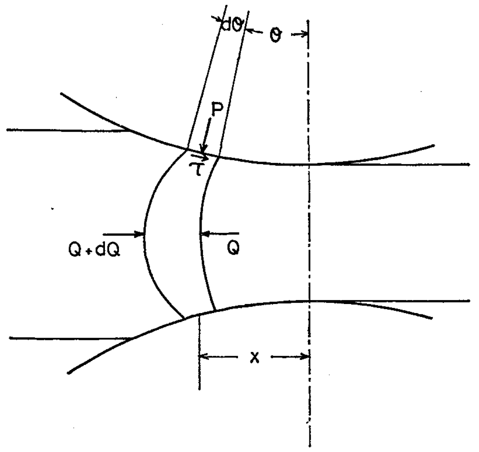


図 2　圧延の際の応力と力の平衡 (OROWAN[2])

$$d\left(\frac{h\,q}{2}\right)=P(\tan\theta\pm\mu)dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

式中の複号は中立点に関してロール出口側，入口側の順に示してある．θ は任意点のロール角度，μ は摩擦係数である．

OROWAN[2] は一般化した理論の解を導出しており，彼の解は不均一変形及び接触面での摩擦状態をすべり及び付着のいずれをも取扱え，材料の降伏応力を位置によつて変えることができるところに利点がある．彼は図 2 に示すように材料表面の摩擦によるせん断応力を τ 及びロール表面に垂直な応力を P とし，材料表面での水平方向の応力は板厚方向に変化するから断面に作用する水平方向の力 Q についてつぎの微分方程式を導いている．

$$\frac{d\,Q}{d\,\theta}=D(P\sin\theta\pm\tau\cos\theta) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ここで，D はロール直径である．

BLAND & FORD[3] は接触面全域ですべり摩擦を仮定した冷間圧延に対して，SIMS[4] は接触面でのせん断応力が材料のせん断降伏応力に等しいという全付着摩擦を仮定した熱間圧延に対して，それぞれ OROWAN の理論を実際上支障のない範囲で近似化している．

このような圧延理論の展開の中でロールと圧延材料間の接触部に働くせん断応力が，冷間圧延では垂直応力に比例し，その比例係数を摩擦係数とする仮定及び熱間圧延では圧延材料のせん断降伏応力に等しいという仮定のもとに圧延の力学的な解析がなされてきた．しかしながら，圧延の力学的解析として圧延理論式から圧延荷重を精度良く求めるためには，理論式自体の精度が必要となり，その式中に含まれている未知パラメータの理解が必要となる．

ロールと圧延材料間に潤滑剤を施した冷間圧延の場合には (1) 及び (2) 式の圧延理論式からわかるように摩擦係数 μ が未知のパラメータとなる．それに比べ，ロールと圧延材料間の接触面でのせん断応力が圧延材料のせん断降伏応力に等しい熱間圧延の場合には，未知パラメータを含むことなく圧延荷重を算出することが可能である．

冷間圧延において，圧延理論式の中の未知パラメータである摩擦係数 μ は接触面を通して一定であり，その際の接触面に働くせん断応力は垂直応力にこの摩擦係数を掛け合せたものであるとしている．この仮定のもとに導出された圧延理論式を介して摩擦係数を間接的に推定することによつて圧延潤滑をは握する方法[5] が多く試みられてきた．

このような圧延理論を介して摩擦係数を推定する方法としては，圧延荷重から逆算する方法及び先進率から求める方法がある．圧延荷重から逆算した摩擦係数の値と先進率によつて求めた摩擦係数の値とは，一般には一致しないようであるが，ロール出口における弾性回復を考慮することによつて両者が一致するということが示されている[6]．このうち圧延荷重から逆算した摩擦係数の値を用いて冷間圧延における潤滑特性を調べた多くの報告がある．

SIMS and ARTHUR[7] は摩擦係数の圧延速度依存性を鋼のコイルの圧延実験において圧延速度 50～300 fpm の範囲で調べており，図 3 のように圧延速度の増加とともに摩擦係数が減少することを示している．つづいて，STONE[8] は鋼の薄板圧延における高速度での摩擦係数の速度効果について報告している．図 4 に示すように，圧

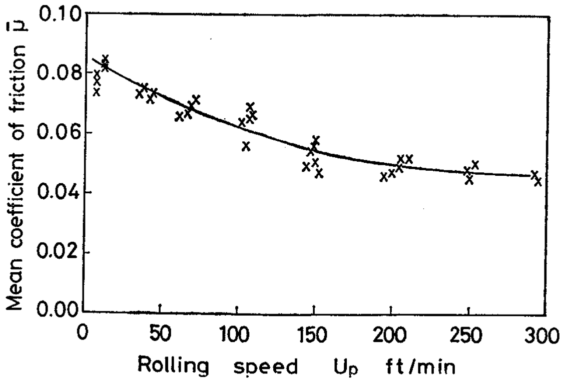


図 3　圧延速度の増加にともなう平均摩擦係数の変化 (SIMS and ARTHUR[7])

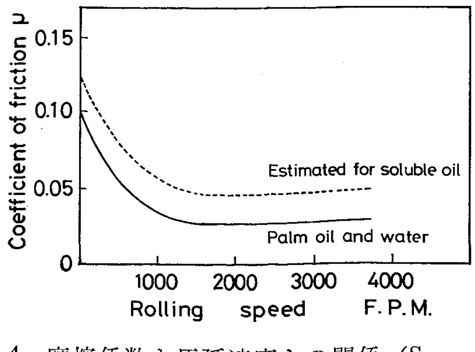


図 4　摩擦係数と圧延速度との関係 (STONE[8])

延速度の増大にともなつて摩擦係数は低下し，ある圧延速度以上では一定になることを示している．パーム油と冷却水の場合，摩擦係数の値が低圧延速度の 0.09 から 1 000 fpm の 0.03 まで低下するが，4 000 fpm まではほとんど一定の値となること，ソリュブル油の場合も同様に摩擦係数の値が 0.11 から 0.05 に低下することを 2，3の測定結果[9)~11)]は示している．

INHABER[12)] は摩擦係数に及ぼす圧延因子の影響について示している．彼は圧延圧力分布を仮定して摩擦係数を算出する式を導出し，HASSENBERG & SIMS[13)] の実験データを用いて摩擦係数をその式から逆算した．その値は 0.02 から 0.12 であり，BLAND & FORD の圧延理論式から逆算された摩擦係数とほぼ等しい値になることが示されている．

ROBERTS[14)] も圧延理論式をもとにして摩擦係数を算出しうる簡単な式を導出し，摩擦係数の種々の圧延因子に対する依存性を調べた．彼は逆算された摩擦係数は圧下率が 10% 以下では一般に高い値を示すが，10% から 50%の圧下率では満足しうる値が得られ，図5に示すように摩擦係数は圧延速度依存性を示すこと及びロール直径が大きくなれば摩擦係数が低下することを示している．

日本においても，佐伯，橋本[15)]は冷間圧延の速度効果について STONE の冷間圧延理論式を用いて逆算した摩擦係数から図6に示すように，#60 スピンドル油，#140 タービン油，120 シリンダ油，パーム油及びヒマシ油の潤滑油の間で比較を行い，摩擦係数は圧延速度の増大とともに低下し，この速度効果は潤滑油の粘度の高いほどまた圧下率が大きいほど顕著なことを示している．水野[6)]は BLAND & FORD の圧延理論式から逆算した摩擦係数と先進率から求めた摩擦係数とを比較しており，鈴木[16)]は HILL の圧延理論式を用いて逆算した摩擦係数から，摩擦係数に及ぼす圧延速度及び潤滑油の諸特性の影響について示している．

最近，冷間圧延操業のタンデム・ミルの圧延速度が高速化するにつれて，この操業速度域での摩擦係数に関する研究が盛んになつてきている．岡本ら[17)]は鋼の薄板のコールドタンデム・ミルにおいて摩擦係数を BLAND & FORD の式から逆算して，摩擦係数と圧延速度及び全圧下率との関係を示している．彼らは摩擦係数の値は0.07 から 0.03 の値でほぼ圧延速度（500～1 500m/min）に対して一定値になること及び全圧下率に対して依存することを示している．鑓田ら[18)]もタンデム・ミルを用いて HILL の式から摩擦係数を逆算して，摩擦係数と圧延速度及び全圧下率との関係において同様な結果を得ている．

筆者ら[19)]も実験室用高速圧延機を用いて圧延速度の広範囲域での摩擦係数の圧延速度及び圧下率依存性を調べた．実験室用圧延機のロール径と実機ミルのロール径との補正及び動的変形抵抗式を用いて，BLAND & FORD の

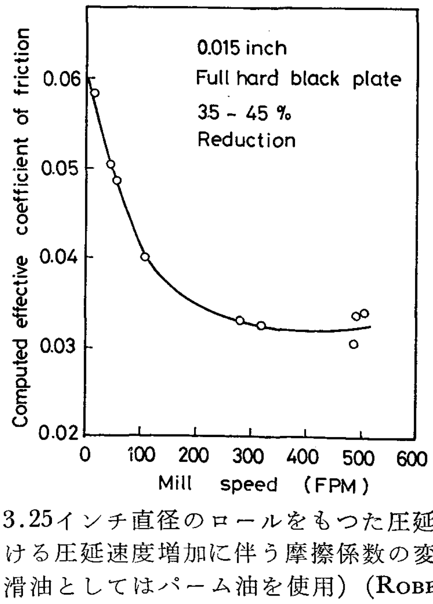
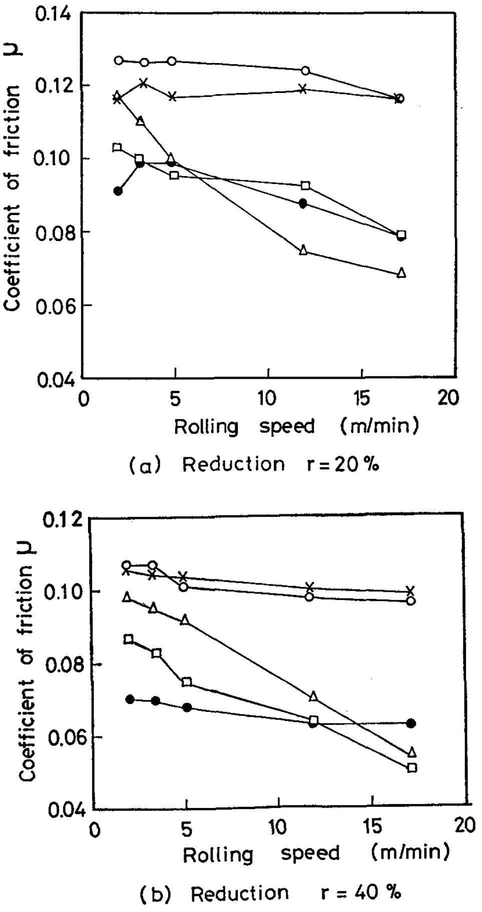


図 5　3.25インチ直径のロールをもつた圧延機における圧延速度増加に伴う摩擦係数の変化（潤滑油としてはパーム油を使用）（ROBERTS[14)]）



×：# 60 スピンドル油 (6.43 cSt : 50°C)
○：#140 タービン油 (36.5 cSt)
△：#120 シリンダ油 (470 cSt)
●：パーム油 (29.1 bSt)
□：ヒマシ油 (141.4 cSt)

図 6　焼なましずみ鋼板の摩擦係数と圧延速度との関係（佐伯，橋本[15)]）

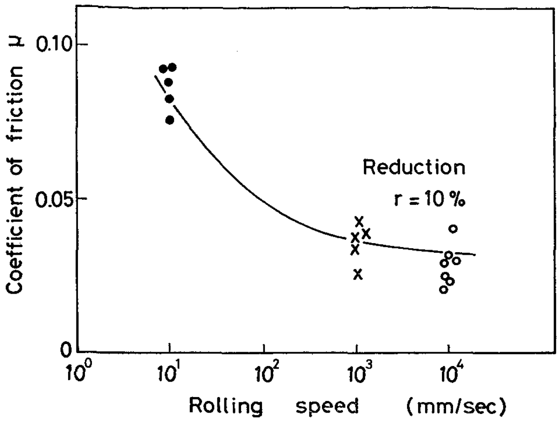


図 7(a) 摩擦係数と圧延速度との関係（圧延材料：低炭素アルミキルド鋼，潤滑油：マシン油）（筆者ら[19]）

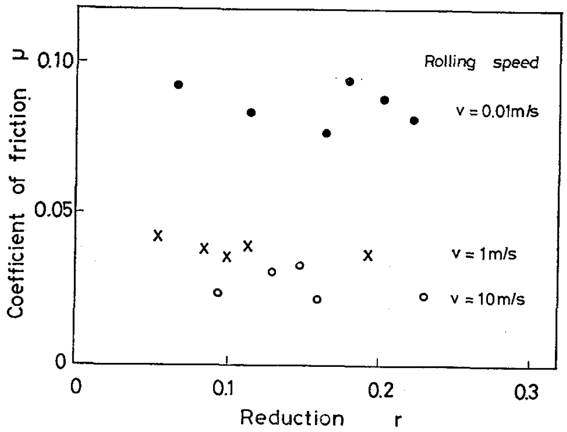
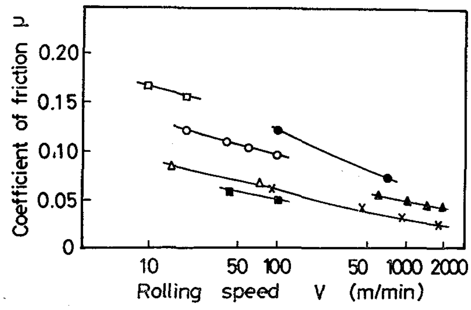


図 7(b) 摩擦係数と圧下率との関係（筆者ら[19]）



□：φ70，○：φ130，●：φ100，△：φ250，▲：φ25，×：φ298，■：φ380

図 8 各種ロール径における摩擦係数と圧延速度との関係（中島[20]）

式から摩擦係数を逆算した結果，図7(a)に示すように摩擦係数は圧延速度とともに減少し，図7(b)に示すように圧下率に対して摩擦係数はほぼ一定であることを明らかにした．

日本鉄鋼協会圧延理論部会においても「冷間圧延における潤滑」の共同研究により，圧延材料を低炭素アルミキルド鋼及び潤滑油をパーム油と一定にし，摩擦係数をBLAND & FORD の式から逆算して各社の実験結果の比較を行つた[20]．図8に示すように各種ロール径における摩擦係数と圧延速度との関係から，摩擦係数は圧延速度の増加とともに減少し，ロール径の増加に伴つて減少することが示されている．

以上の全ての結果のうち摩擦係数の圧延速度依存性を図9にまとめる．摩擦係数は圧延条件が種々異なつているにもかかわらず，ほぼ 0.15～0.03 の値の間にあり，圧延速度の増加とともに減少することがわかる．

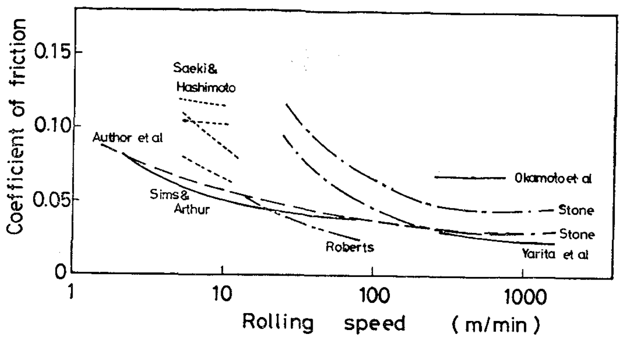


図 9 摩擦係数と圧延速度との関係

表 1 ストレート潤滑とエマルジョン潤滑における潤滑性に影響を与える因子（筆者ら[21]）
（＋：摩擦係数依存性 有
－：摩擦係数依存性 無）

潤滑因子		ストレート潤滑 圧延速度 V 50 m/min	ストレート潤滑 圧延速度 V 800 m/min	エマルジョン潤滑 圧延速度 V 50 m/min	エマルジョン潤滑 圧延速度 V 800 m/min
粘度		＋	－	－	－
成分（ナフテン系 パラフィン系 合成エステル系）		＋	－	＋	＋
表面張力		－	－		
添加剤（オレイン酸）	低粘度基油		＋		＋
	高粘度基油		－		＋

このような摩擦係数の力学的な圧延因子依存性とは別に潤滑油の諸因子（粘度，成分等）に対する依存性についても調べられている．筆者ら[21]は表1に示すように，ストレート潤滑及びエマルジョン潤滑の2種の圧延速度において潤滑油の諸因子に対する摩擦係数の差を示している．潤滑油の諸因子の変化に対し，ストレート潤滑の高速域では摩擦係数の差異はほとんどなく，低速域では摩擦係数に差異を生じること及びエマルジョン潤滑では潤滑油の粘度を除いて高速，低速とも摩擦係数に差異を生じることを示している．加藤ら[22]は高圧延速度域のエマルジョン潤滑での摩擦係数に及ぼす潤滑油の影響につ

いて示している．

このようなロールと材料間の界面での潤滑特性を圧延理論式を介して圧延荷重から逆算した摩擦係数によつて評価する方法では，接触弧を通して摩擦係数が一定であり，界面のせん断応力が垂直応力に比例するという二つの仮定を含んでいるため，別の独立な実験方法によつてこれらの仮定について検討がなされねばならない．圧延理論を介さずに直接摩擦係数を測定する方法として，ロールにピンを埋め込んで垂直応力及びせん断応力を検出する方法があるが，この方法によりロールと材料間の接触弧での摩擦係数の分布が測定できる．

Rooyen & Backofen[23]は垂直ピン及び傾斜ピンを用いて接触弧での垂直応力及びせん断応分布を測定し，図10に示すようにロールと材料間の界面が付着摩擦の状況の場合には，垂直応力とせん断応力とは比例し，図11に示すように界面が潤滑された場合には，比例関係はなく摩擦係数が接触弧で一定でなくなることを示している．松浦，本村[24]も同様な傾斜ピン法を用いて，冷延鋼板を圧延材料にソリュブル油を潤滑油にし，接触弧での垂直応力及びせん断応力分布を測定して摩擦係数分布を

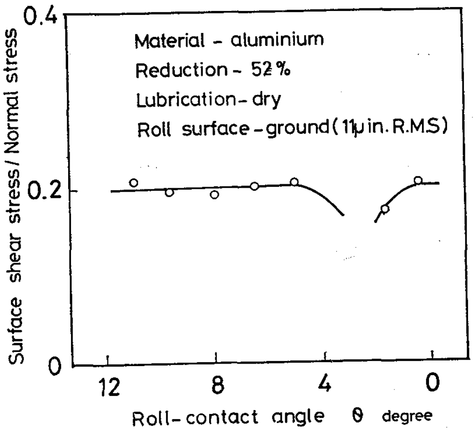


図 10　無潤滑の場合の垂直応力とせん断応力との比（Rooyen & Backofen[23]）

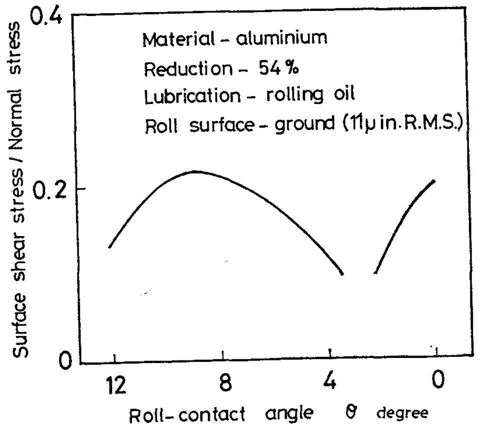


図 11　潤滑をした場合の垂直応力とせん断応力との比（Rooyen & Backofen[23]）

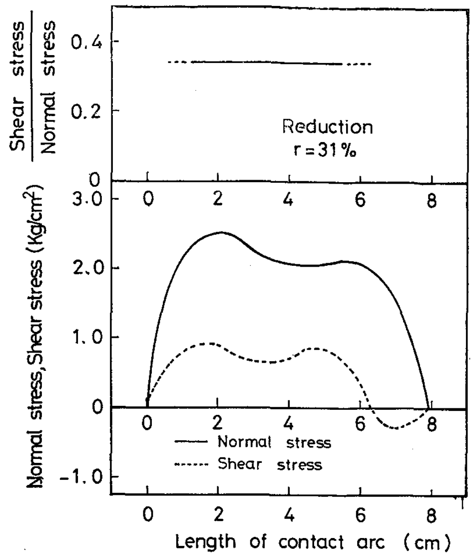


図 12　プラスチシンを用い，タルク潤滑をした場合の垂直応力とせん断応力との比（筆者[25]）

求めている．その測定結果によると Rooyen ら[23]の潤滑をほどこした結果と同様に，摩擦係数は接触弧にそつて一定ではなく変化することが示されている．

筆者ら[25]もプラスチシンを圧延材料とし，千々岩，畑村[26]によつて開発されたせん断応力ピンを用い，ロールと材料間が付着摩擦状況の場合の接触弧での垂直応力及びせん断応力分布を測定し図12の結果を得ている．それによると摩擦係数は Rooyen らの付着摩擦の測定結果と一致し，せん断応力は垂直応力に比例し摩擦係数は接触弧を通して一定であることが示されている．

これらの結果からすると冷間圧延理論式を導出する際に用いた摩擦係数が接触弧を通して一定であるという仮定は，圧延速度が高速になり流体潤滑状況が優勢になつてくると問題を生じ，圧延理論の精度に信頼がおけなくなる．この点から，ロールと材料との間に働くせん断応力をクーロンの法則に代つて流体潤滑理論によつて導出する方法が用いられるようになる．

2·2　潤滑理論による解析

コールドタンデム・ミルの圧延速度が高速化するにつれて，ロールと材料間に導入される潤滑油の油量が増加し流体潤滑状況が優勢になることから，流体潤滑理論を用いてロールと材料間の接触弧での潤滑における力学的特性及び潤滑油の特性について解析を行う報告が最近見られる．

Cheng[27]は図13のロール間の圧延形状に示すようにロールを剛体，材料のみが塑性体であると考え，流体潤滑理論に支配される流体膜の中で剛塑性体の材料が圧延されるものとして解析を行つている．ロールと材料間の入口部に導入される油膜厚みは弾性流体潤滑（EHL）理論によつて独立に求め，流体の運動方程式及び連続の式に加え，圧力及び温度と粘度との関係式，ロール間の

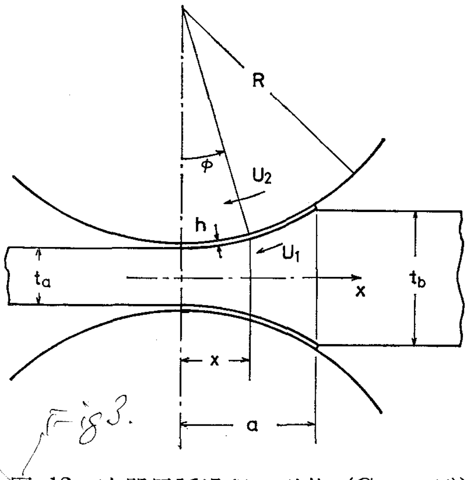


図 13 冷間圧延過程の形状 (CHENG[27])

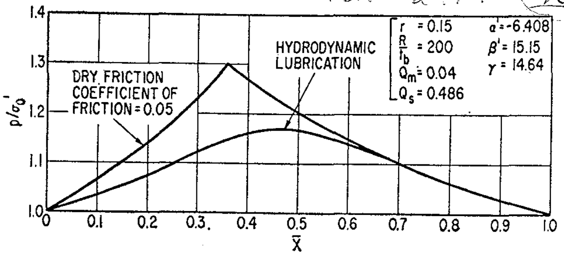


図 14 流体潤滑理論による圧延圧力分布と付着摩擦での圧延圧力分布との比較 (CHENG[27])

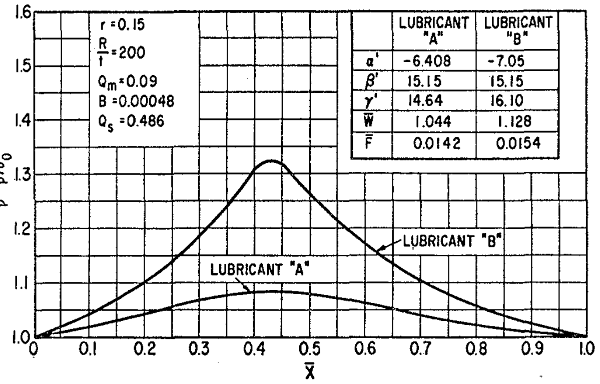


図 15 粘度の圧力係数と圧力分布 (潤滑剤Bの圧力係数は潤滑剤Aより約10%高い (CHENG[27])

材料の釣合方程式，降伏条件式，連続の式及びエネルギ式によつて接触弧での圧力分布及びせん断応力分布を計算している．図 14 は得られた圧延圧力分布の一例であつてクーロンの法則に従う付着摩擦の場合との比較が示されている．圧延圧力分布はなだらかになり付着摩擦の場合に生じる中立点での尖点はなくなり，圧力ピークはかみ込み側に移動している．図 15 に示すように粘度の圧力係数のわずかな違いによつて圧延圧力分布が大きく変化し，また油膜の温度上昇による粘度低下によつても速度効果が認められることを示している．

富沢，一ノ井[23]はロールと材料間に流体潤滑膜が存在しているとして，油膜のブロックの釣合い式及び連続の式からせん断応力を求める式を導出している．摩擦係数を求めるために，入口部の油膜厚みを仮定し，せん断応力分布を 2 次放物線に近似して，測定した圧延荷重からせん断応力及び圧力分布を求め，摩擦係数分布を推定している．

最近，ロールと材料間の接触弧の変形領域だけでなく入口領域及び出口領域での解析を含めた詳細な冷間圧延における流体潤滑理論が展開されている．ロールと材料間の入口部での解析は，古くからころがり軸受のころがり運動に適用される流体潤滑理論を用いて解析が試みられている．

水野[29]は潤滑油の粘度を一定にし，Navier-Stokes の式から入口部の油膜厚みを求め，油膜厚さ当量を提案して入口油膜厚みの定性的な意味を解析している．その式によると入口部での油膜厚みは速度及び粘度に比例し，かみ込み角及び入口部での圧力に逆比例することを表わしており，実験からもその関係が成り立つことを示している．CHENG は解析のなかで，入口部の油膜厚みとして DOWSON の弾性流体潤滑理論[30]から求めた値を用いている．

WILSON & WALOWIT[31]及び SNIDLE, DOWSON & PARSONS[32]は引抜及び押出し加工のダイスと材料間の入口部での油膜厚みの解析を行つている．彼らは潤滑油の粘度が圧力に依存するが温度には影響を受けない仮定から，入口部での油膜厚みの解析解を導出している．WILSON & MAHDAVIAN[33]は WILSON & WALOWIT の解析を発展させ，温度の影響を考慮に入れたレイノルズ方程式及び潤滑油の粘度が圧力及び温度に依存するとする粘度式から入口部の解析を行つている．

筆者ら[34]もレイノルズ方程式，エネルギ式及び粘度式からロールと材料間の入口部での解析を行つたが，入口部での温度上昇は図 16 に示すように圧延速度が高速になると 50°C にまで及ぶこと，図 17 に示すように入口油膜厚みは温度の影響を考慮に入れない場合に比べて，圧延速度が高速になると非常に大きな差異を生じることを明らかにした．

冷間圧延において入口部の解析を考慮に入れた流体潤滑理論を展開して解析を行つたのは DOW, KANNEL & BUPARA[35]及び WILSON & MURCH[36]である．DOW らは熱的効果を考慮に入れて入口油膜厚みを求めている．図 18は入口油膜厚みと圧延速度との一例で，潤滑油の粘度に温度効果を入れた場合と温度効果を入れない場合との比較が示されている．圧延速度が高速になると入口油膜厚みは温度効果を入れることによつて非常に低下することが示されている．彼らはロールと材料間の接触弧においては，CHENG と同様に運動方程式，連続の式及び釣合方程式から圧延圧力及びせん断応力分布を求めている．圧延圧力分布についてはロールにマンガニンを蒸着さ

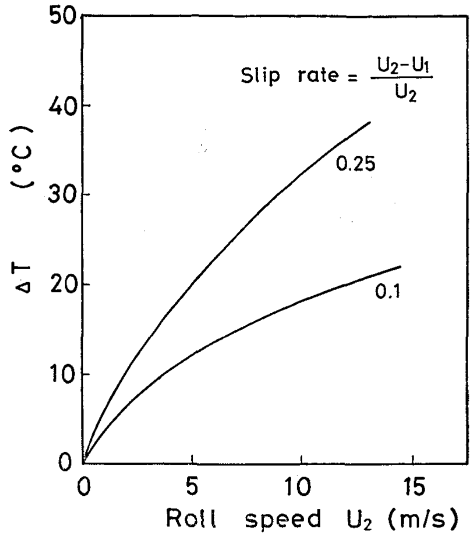


図 16　ロール速度増加に伴う入口部での上昇温度の変化（筆者ら[34]）

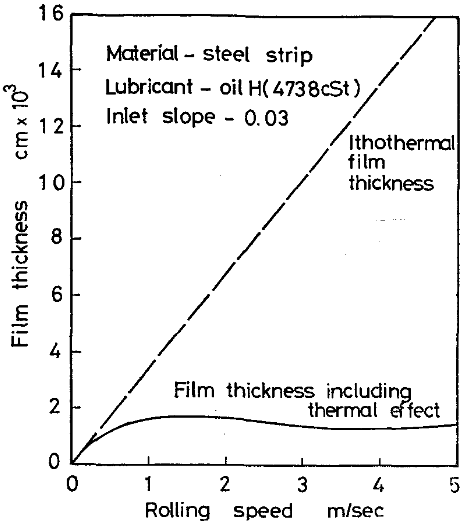


図 18　入口油膜厚みに対する圧延速度の影響（Dow, Kannel & Bupara[35]）

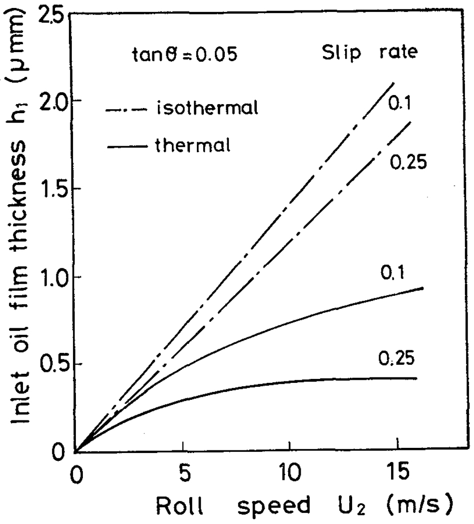


図 17　ロール速度増加に伴う入口油膜厚みの変化（筆者ら[34]）

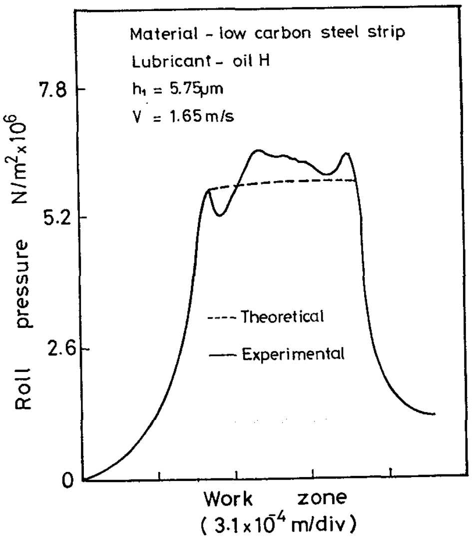


図 19　圧下率 14% での圧力分布の計算値と実験値との比較（Dow, Kannel & Bupara[35]）

せ，それをセンサとして用いて圧延圧力分布を測定しており図 19 に示すようにその測定結果が計算値と一致することを示している．

Wilson & Murch[36]も Wilson & Mahdavian の温度効果の影響を考慮したレイノルズ方程式を用いて入口部での油膜厚み及び変形領域での圧力分布を求めている．入口油膜厚みは温度効果の影響を考慮することによつて非常に減少し，高圧延速度になると圧延速度の増加とともに入口油膜厚みが減少する状況の生じることが示されている．

実際にはロールと材料間の潤滑油の油膜厚みがロール及び材料の表面粗さの高さよりも大きいとは限らず，その表面粗さと同程度あるいはそれ以下になるとロールと材料が接触するような条件で圧延されるようになる．この場合には流体潤滑理論の立場とは異なり，ロールと材料の接触の影響を考慮に入れた混合潤滑理論が展開されねばならない．混合潤滑とは境界潤滑と流体潤滑とが共存する状態で，潤滑油の油膜厚みがロールと材料の表面粗さの高さと同程度およびそれ以下になるとロールと材料の接触が起こり始め，その領域が境界潤滑に移行してゆき，油膜厚みの値が小さくなるにつれて境界潤滑領域の割合が大きくなつてゆく潤滑状態と考えられる．

このような混合潤滑状態での解析としては弾性体どうしの接触の場合，Christensen[37]及び Tsao & Tong[38]の解析がある．しかし，一方が塑性変形するような工具と材料間の接触部での混合潤滑状態における解析はほとんどなく，筆者ら[39]及び Tsao & Sergent[40]によつて最近解析が行われている状況である．筆者らの引抜加工におけるダイスと材料間の混合潤滑状態の解析は，入口油膜厚み及びダイスと材料の表面粗さから入口部でのダ

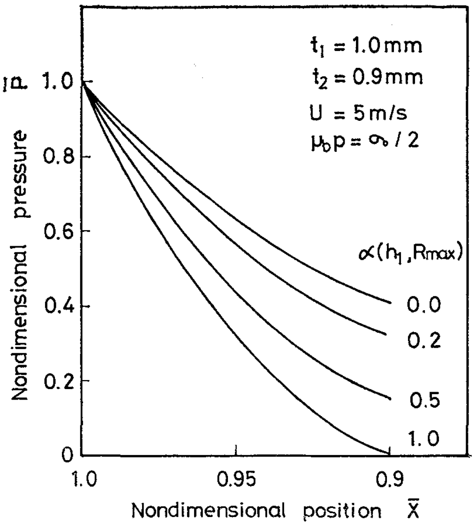


図 20　引抜加工における接触率 α を変化させた場合の圧力分布（筆者ら[39]）
α ：入口部でのダイスと材料との接触率

イスと材料の接触率を求め，接触面では接触率が垂直圧力に比例するとして圧力分布を求めたものである．図20はダイスと材料の表面粗さを変化させることによつて圧力分布が大きく変化することを示している．

このような混合潤滑理論における解析についてこれからの発展が期待される．

3. 流体潤滑理論

3·1　基礎式の導出[41]

油膜で完全に隔てられている 2 面は相対的すべりのために潤滑油はせん断を受ける．図 21 に示すような x, y 軸をとつて x 方向に上の面が U_1, 下の面が U_2 の速度で x の正の方向に動き，上の面が y の正の方向に V なる速度で動くとする．このように問題を x, y 方向の 2 次元問題とし，次の仮定を置いて簡単化する．

1）流体をニュートン流体とする．すなわちせん断応力は垂直方向の速度勾配に粘度を乗じたものである．

2）流れは層流とする．

3）流体の慣性力は考えない．

4）流体は非圧縮とする．

5）圧力の y 方向の変化は無視する．逆に，y 方向の速度勾配は x, z 方向とそれよりはるかに大きいので，x, z 方向の速度勾配を無視する．

6）固体面と流体面との界面ですべりがおこらないものとする．

この仮定から図 21 の一点 (x, y) の微小部分に働く x 方向の力の平衡を考えると

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \quad \cdots\cdots (3)$$

ニュートンの粘性の式は

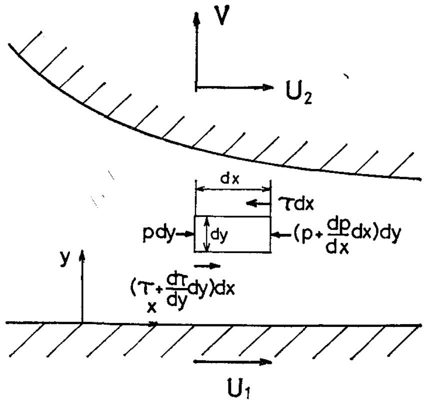


図 21　潤滑膜における圧力とせん断力との平衡

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad \cdots\cdots (4)$$

であるから

$$\frac{dP}{dx} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \cdots\cdots (5)$$

となる．同様にして，y 方向の力の平衡を考え，仮定(5)を考慮すると

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \cdots\cdots (6)$$

が得られ，(5)及び(6)式が運動方程式である．(5)式を積分して

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{dP}{dx}y^2 + C_1 y + C_2 \quad \cdots\cdots (7)$$

が得られる．C_1 及び C_2 は積分定数であり，

$$y = 0,\ u = U_1;\quad y = h,\ u = U_2 \quad \cdots\cdots (8)$$

の境界条件から

$$u = \left\{U_2 + (U_1 - U_2)\frac{h-y}{h}\right\} + \left\{-\frac{y(h-y)}{2\eta}\frac{\partial P}{\partial x}\right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

となる．同様に(6)式を積分し

$$v = C_3 y + C_4 \quad \cdots\cdots (10)$$

となり

$$y = 0,\ v = 0;\quad y = h,\ v = V \quad \cdots\cdots (11)$$

の境界条件から

$$v = V\frac{y}{h} \quad \cdots\cdots (12)$$

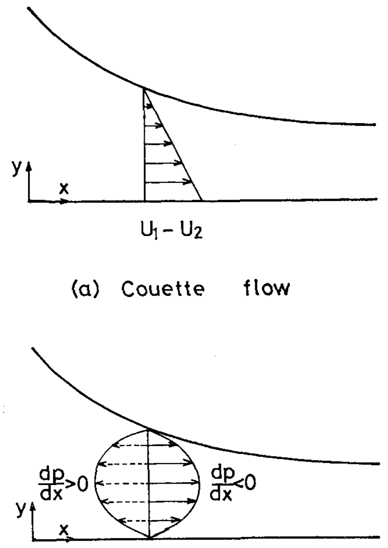
が得られる．

流れの連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \cdots\cdots (13)$$

となり，この連続の式に(9)及び(12)式を代入して y について 0 から h まで積分する．

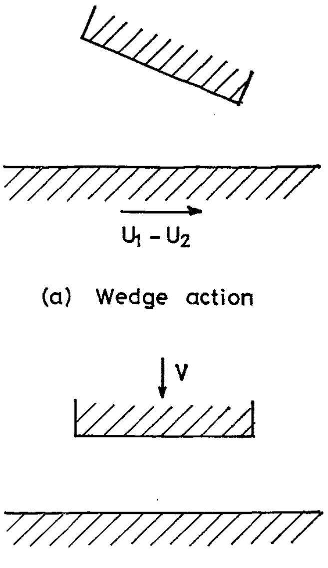
$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}dy + \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y}dy = 0 \quad \cdots\cdots (14)$$



(a) Couette flow

(b) Poiseuille flow

図 22　潤滑膜内の速度分布



(a) Wedge action

(b) Squeeze action

図 23　圧力の発生要因

(14)式から

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial P}{\partial x}\right)=6(U_1-U_2)\frac{dh}{dx}+12V\cdots\cdots\cdots(15)$$

が得られる．上式がレイノルズの方程式である．

ここで，流体膜の流れ及びレイノルズ方程式の物理的意味を考えることにする．簡単のために x 方向の流速 u だけを考えれば，図 22 に示すように(9)式の u の速度をあらわす第一項は図 22(a) に示すように粘性によつて固体面に引つぱられる流れを表わしており，これをせん断流れと呼ぶ．この流れは圧力 P に無関係にせん断速度 $(U_1+U_2)/2$ を最大速度とする直線分布を示す．第2項は図22(b)に示すように圧力差にもとづく流れでポテンシャル流れと呼ばれる．この流れは $(-h^3/8\eta)dP/dx$ を最大速度とする放物線速度分布を示す．この二つの項によつて連続の条件が満たされるようになる．

(15)式のレイノルズ方程式の右辺の物理的な意味として，第一項は図 23(a) に示すように先細りの空間に速度をもつた流体が押合い圧合うことによつて圧力を生じるくさび効果によるもので，第二項は図 23(b) に示すように2面の押合いよつて圧力があがる絞り効果によるものである．

流体膜の存在するロールと材料間の入口部での解析を行う場合には図 24 に示すような油膜形状及び2面の速度から導出されるレイノルズ方程式を用いる．図 24 より(15)式の速度 U_1，U_2 及び V は

$$U_1=U_1^*$$
$$U_2=U_2^*\cos\theta\fallingdotseq U_2^*\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$
$$V=U_2^*\sin\theta\fallingdotseq U_2^*\tan\theta=U_2^*\frac{dh}{dx}$$

で表わされ，(16)式を(15)式に代入すると

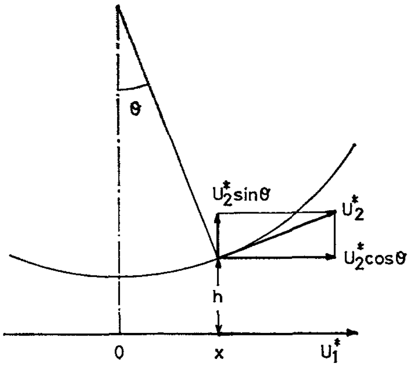


図 24　油膜形状と2面の速度

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial P}{\partial x}\right)=6(U_1^*+U_2^*)\frac{dh}{dx}\quad\cdots\cdots(17)$$

が得られ，h が x の関数であれば上式を解けば圧力が求まるので，(17)式を積分すると

$$\frac{dP}{dx}=6(U_1^*+U_2^*)\left(\frac{h-h^*}{h^3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

が得られる．ここで，h^* は境界条件によつて決まる．この(18)式が冷間圧延における入口部での解析に用いるレイノルズ方程式である．

これらの基礎式の応用例としては，ロールと材料間の入口部での油膜厚みの解析のために(18)式のレイノルズ方程式を用いる例及び変形領域の界面でのせん断応力を求めるために(4)及び(9)式を用いる例がある．

3・2　流体潤滑理論による入口部での解析

冷間圧延におけるロールと材料間の入口部での解析として最も大切なことは入口部での油膜厚みを求めることである．図 25 にロールと材料間の流体油膜の流れを示し，次の仮定が成り立つものとする．

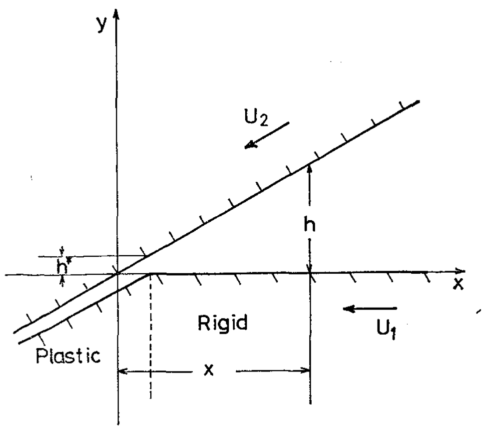


図 25 ロールと材料間入口部での形状

7) ロールと圧延材料は入口部で剛体である.

8) 材料は潤滑油の圧力が σ_0 になつたときに降伏する.

σ_0 は材料の降伏応力である.

レイノルズ方程式としては図 25 における x の方向及びロール, 材料の速度 U_1, U_2 から

$$\frac{dP}{dx}=-6\eta(U_1+U_2)\left(\frac{h-h^*}{h^3}\right) \quad \cdots\cdots(3)$$

となる. ここで, h^* は境界条件として流体膜の圧力が材料の降伏応力 σ_0 に達した点での油膜厚みで, 入口部での油膜厚みとなる. 油膜厚み h が x の関数で表わすことができ, (19)式を積分することによつて入口部での油膜厚み h^* が求まることになる. しかし, 右辺の項中の潤滑油の粘度 η が圧力 P 及び温度 T の関数であるので, (19)式を積分して解析解を得ることは困難になる.

そこで, 潤滑油の粘度 η を適当な圧力 P 及び温度 T の関数で近似することによつて入口部での油膜厚みの解析解及び数値解を求めることができる.

i) 潤滑油の粘度 η を一定とする.

粘度 η を

$$\eta=\eta_0 \quad \cdots\cdots(20)$$

とおき, (20)式を(19)式に代入し, 境界条件として

$$h=\infty,\ P=0 \qquad h=h^*,\ P=\sigma_0 \quad \cdots\cdots(21)$$

で積分を行うと, 入口部での油膜厚み h^* は

$$h^*=\frac{3\eta_0(U_1+U_0)}{\tan\theta\cdot\sigma_0} \quad \cdots\cdots(22)$$

と導出される. ここで h は x の関数で図 25 より

$$h=\tan\theta\cdot x \quad \cdots\cdots(23)$$

で与えられる.

この解析解は水野[23]の提案している油膜厚み当量 td

$$td=\frac{\eta_0(U_1+U_2)}{\alpha\cdot\sigma_0} \quad \cdots\cdots(24)$$

と同一であり, 油膜厚みの定性的な理解のために使用されている. ここで, α はかみ込み角である.

ii) 潤滑油の粘度 η を圧力 P の関数とする.

粘度 η を

$$\eta=\eta_0 e^{rP} \quad \cdots\cdots(25)$$

とおき, (19)式に代入して積分をおこなうと, 入口部での油膜厚み h^* は

$$h^*=\frac{3\eta_0 r(U_1+U_2)}{(1-e^{-r\sigma_0})\cdot\tan\theta} \quad \cdots\cdots(26)$$

と解析解が導出される. ここで r は潤滑油の粘度の圧力係数である. この解析解は WILSON & WALOWIT[31] 及び SNIDLE ら[32]によつて導出されている.

iii) 潤滑油の粘度 η を圧力 P 及び温度 T の関数とする.

粘度 η を

$$\eta=\eta_0\cdot f(P,\ T) \quad \cdots\cdots(27)$$

のように一般式として与えられるが, 具体的には

$$\eta=\eta_0\exp\{rP-\delta(T-T_0)\} \quad \cdots\cdots(28)$$

$$\eta=\eta_0\frac{\exp(rP)}{1+\delta(T-T_0)} \quad \cdots\cdots(29)$$

$$\eta=\eta_0\exp\left\{\alpha P-\beta\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)+r\frac{P}{T}\right\} \quad \cdots(30)$$

で与えられている. (28)式は DOW ら[35] 及び WILSON ら[36], (29)式は KANNEL ら[42] 及び(30)式は CHENG[27] によつて提案されている粘度式である.

これらの粘度式の場合には, i) 及び ii) のような入口油膜厚みに関しての解析解は得られない. この条件での入口油膜厚みを求めるために次の仮定をたてる.

9) 潤滑油によつて伝達される熱は無視する.

10) ロールと材料表面の温度は一定で, 囲りの温度 T_0 に等しい.

11) 潤滑油の粘度は圧力及び温度の関数であり, 粘度は油膜断面の平均温度の関数である.

潤滑油の温度は流体膜が定常流れであるので, 次のエネルギ式

$$\rho C\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]-K\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-u\frac{T}{\rho}\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial P}{\partial x} \quad \cdots\cdots(31)$$

から求められるが, 仮定(9)より左辺の第1項の熱伝達の項を除去し, 右辺において第2項の圧縮による熱発生が第1項のせん断による熱発生に比べて非常に小さいものとして第2項を除去した次のエネルギ式[42]

$$K\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0 \quad \cdots\cdots(32)$$

を用いて, 温度解析を行う.

(19)式のレイノルズ方程式, (27)式の潤滑油の粘度式及び(32)式のエネルギ式から入口油膜厚みの数値解が計算機を用いて求められる. この数値解は DOW ら[35], WILSON & MURCH[36] 及び筆者ら[39]によつて求められている.

3·3 流体潤滑理論による変形領域部での解析

圧延速度が高速化するにつれてロールと材料間に潤滑油が多量に導入され，流体膜でロールと材料間が完全に隔てられるような状況では，その界面に働くせん断応力がクーロンの法則に従わないという測圧ピンの結果からも推定できるように，せん断応力を流体潤滑理論によつて導出して解析を行う方向が必要となる．

流体膜でロールと材料が完全に隔てられて圧延される模式図は図 13 に示されている．ロール速度 V，任意の点での材料速度 U 及び潤滑油の油膜厚み h とすると，せん断応力は仮定(1)のニュートン流体から

$$\tau=\eta\frac{\partial u}{\partial y} \quad\cdots(4)$$

で示され，速度 u は(9)式と同様に

$$u=\left\{V+(V-U)\frac{h-y}{h}\right\}+\left\{-\frac{y(h-y)}{2\eta}\frac{\partial P}{\partial x}\right\} \quad\cdots(33)$$

で示される．(33)式を(4)式に代入するとせん断応力が得られる．

$$\tau=\eta\frac{V-U}{h}+\frac{2y-h}{2\eta}\frac{\partial P}{\partial x} \quad\cdots(34)$$

ここで，任意の点の材料の速度 U 及び潤滑油の油膜厚み h は材料の流れの連続性及び潤滑油の流れの連続性から

$$U=\frac{t_1}{t}U_1 \quad\cdots(35)$$

$$h=\frac{U_1+V}{U+V}h_1 \quad\cdots(36)$$

が得られ，変形領域界面 ($y=0$) でのせん断応力 τ は(35)及び(36)式を(34)式に代入し，$y=0$ とした式となる．ここで，t_1 は入口部では材料の板厚，t は任意の点での板厚である．

変形領域での圧延圧力は(1)及び(2)式の釣合方程式のせん断応力 (μP または τ) に(34)式を代入して積分すれば求まる．この際の潤滑油の粘度式は(27)式を用い潤滑油の温度はネルギ式から求められ，その境界条件としての材料表面の温度は材料の加工エネルギの全てが熱に変換されるものとして

$$T_{y=0}=T_0+\frac{\int\sigma d\varepsilon}{\rho C} \quad\cdots(37)$$

で与えられる．

このようにして圧延圧力分布が CHENG[27]，DOW ら[35] 及び WILSON & MURCH[36]によつて求められている．CHENG は(33)式の流体膜の流れのうちポテンシャル流れがせん断流れに比べてせん断応力に及ぼす影響が非常に小さいとして，(33)式の右辺の第2項を除去し(34)式を

$$\tau=\eta\frac{V-U}{h} \quad\cdots(38)$$

としてせん断応力を導出して，圧延圧力分布を求めている．

4. 混合潤滑理論

ロールと材料間の潤滑油の油膜厚みがロールと材料の表面粗さと同程度およびそれ以下になりロールと材料が接触するような条件では，境界潤滑及び流体潤滑が混在する混合潤滑領域となる．

この領域での解析としてはほとんどが弾性体どうしの接触問題に限られており，流体潤滑理論を拡張してレイノルズ方程式に工具及び材料の表面おうとつの影響を考慮に入れて解析を試みる例が多い．CHRISTENSEN ら[43]は工具と材料の表面おうとつを考慮に入れた流体膜の厚さを図 26 のように

$$h=h_0+h_s \quad\cdots(39)$$

とおき，(39)式を(19)式のレイノルズ方程式に代入して工具及び材料の表面おうとつの影響を考慮に入れた圧力を求めている．

HAMILTON ら[44]は表面おうとつが流体潤滑から境界潤滑への遷移の問題であるとして図 27 のような円柱状の突起が一方の面に並んだモデルを考え，そのモデルの一単位について，レイノルズ方程式を用いて表面おうとつを考慮に入れた圧力分布を求めている．この結果から巨

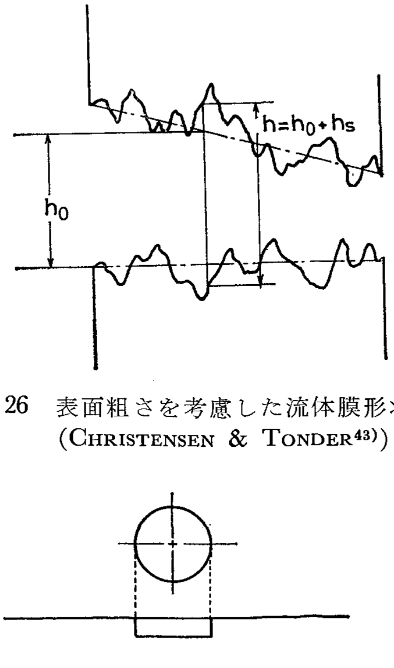


図 26 表面粗さを考慮した流体膜形状 (CHRISTENSEN & TONDER[43])

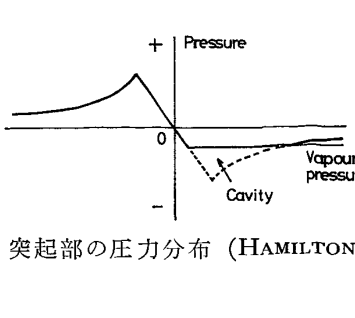


図 27 突起部の圧力分布 (HAMILTON, et al[44])

視的に平行な面でも表面おうとつを考慮することによつて圧力が生じることを示している.

この従来の流体潤滑理論を発展させた解析とは別に,混合潤滑を流体潤滑及び境界潤滑の混在したものとして流体膜による負荷容量と境界潤滑領域にある境界面での負荷容量とを重ね合せて解析したものもある.

弾性体どうしの接触面の混合潤滑問題の解析において理論的には確立されていない状況において,ロールと材料の組合せのような一方が弾性体で,もう一方が塑性変形する場合には更に解析は困難である.しかし,このような条件においても弾性体どうしの混合潤滑状況での解析を展開することができるとすると解析が可能となる.

工具と材料の接触面の混合潤滑状況での境界潤滑領域の面積比を α とすると混合潤滑領域でのせん断応力 τ_{mix} は境界潤滑領域でのせん断応力 τ_b と流体潤滑領域でのせん断応力 τ_f とを重ね合せた

$$\tau_{mix}=\tau_b\alpha+\tau_f(1-\alpha) \quad \cdots\cdots(40)$$

となる.ここで,境界潤滑状況を示す接触面の接触率 α は油膜厚み,ロール及び材料の表面おうとつによつて決まる関数である.

入口部での油膜厚み及び変形領域の任意の点での油膜厚みはレイノルズ方程式及び潤滑油の流れの連続性から求められるが,ロールと材料の表面おうとつは次の仮定によつて簡単化する.

12) 表面おうとつはガウス分布をしている.

13) ロールと材料の表面おうとつは,一方を鏡面に一方を両方の表面おうとつを相和したおうとつを有する面とする.

14) 全ての表面おうとつは弾性体どうしの接触の場合と同じである.

入口部での接触率はレイノルズ方程式から求められた入口油膜厚み及び圧延前のロールと材料の相和した表面粗さから決めることができる.この入口部で接触率を用いて,変形領域でのせん断応力の解析を行う二つの方法がある.

一つは筆者ら[39]の弾性体接触論を拡張した,変形領域の接触率が垂直圧力に比例するとして触析する方法であり,もう一つは TSAO & SERGENT[40]の潤滑油の流れ連続性を基礎にした,変形領域の任意の点での接触率が油膜厚み及び表面おうとつによつて求めることができるとして解析する方法である.

この領域での解析は未だ試論の域にあり今後の発展が期待される.

5. 実際への応用

冷間圧延の潤滑特性をは握するために,ロールと材料間の界面現象の解析を行うことは重要であるという認識のもとに研究が進められているが,圧延荷重に及ぼす界面でのせん断応力の影響はコンピュータ・コントロールの範囲においてはかなり小さいと考えてよい.冷間圧延において潤滑をほどこした条件で,せん断応力を2倍変化させたとしても圧延荷重としては1割程度以下の変化でしかなく,圧延荷重の計算にはせん断応力が大きな影響を与えないことがしばしばある.

この現象からして,せん断応力が圧延圧力に比例するというクーロンの法則がロールと材料間の界面で成立するとし,摩擦係数の値が図9に示されているように0.1～0.05の範囲にあるとして,現場の圧延機の圧延荷重の計算を行つてもほとんど問題なく操業することができることになる.

また実際操業の面からも,高速になつたとしてもエマルジョンとして潤滑油が供給されているために潤滑油の粘度が基油に比べて低下していること及び潤滑油のせん断による温度効果によつて粘度が低下していることから完全に流体膜によつてロールと材料が隔てられているわけではなく,かなり境界潤滑領域が存在している混合潤滑状況にある.このため単純に流体潤滑理論によつてせん断応力を求め圧延荷重の計算を行うことは現状では意味がないようである.

しかし,このような力学的な面に比べ,ロールと材料間の界面現象が大きな影響を与えるものとして,圧延後の製品の表面性状がある.一定の表面性状を得るためにはロールと材料間の界面現象を正確には握する必要があり,冷間圧延後の製品に生じるヒート・スクラッチ,フリクションピックアップ及びチャタリングによる表面欠陥を除去するための研究が行われている.

この解決のためには潤滑油自体の問題が大きく,潤滑油の物理的性質及び化学的性質の面から詳細に検討させるべきではあるが,潤滑理論の面からも解決の糸口を見つけ出さねばならない.この分野の研究はまだ進んではおらず,実際のデータの集積も少ないが,現場では最も重要な問題の一つでもある.

最近,具体的な表面欠陥の観察結果も報告[45]されている.その欠陥のうちフリクション・ピックアップの原因はロールと塑性変形した材料界面での境界潤滑状況を示す領域での油膜破断が力学的及び熱力学的な原因によつて成長することによるものと思われている.

高速になつて油膜破断が生じるのはロールと材料間の相対すべり量が大きくなること及びこれによつて界面での熱の発生が大きくなることが要因として考えられる.この要因とは別に圧延速度とともに界面での境界潤滑領域の割合がどのように変化していくかという現象を解析することも大切であり,この割合を潤滑理論を手助けにして定量的に解析を行うことが可能である.

筆者ら[40]の混合潤滑理論は流体潤滑領域及び境界潤滑領域の割合を決める方法を提案している.このためには入口部での油膜厚みを精度良く定量的に解析できることが必要であり,筆者ら[34]の入口油膜厚みの解析は,ロー

ルの弾性変形を考慮することによつてかなりの精度で計算値と測定値とが一致することを示している．従つて，この入口部での油膜厚み及びロール及び材料の表面粗さの値から混合潤滑領域での境界潤滑領域の割合を求めることができる．

この結果によるとこれまでの一般的な概念とは異なり，圧延速度の増加によつてもロールと材料間に導入される潤滑油の量が増加するとは限らず，入口油膜厚みの減少の生じることが示される．このことから高速になれば，境界潤滑領域の増加もあいまつてフリクシッン・ピックアップの発生及び成長が進み，表面欠陥の生じやすいことが潤滑理論からも理解することが可能である．

この解析結果と実際の現象との対応は未だなされておらず，これから比較検討することによつてフリクション・ピックアップの発生原因を解析的な面からまとめることが可能になるものと期待される．

6. おわりに

冷間圧延における潤滑において，ロールと材料間の界面現象について逆算した摩擦係数から検討を行つた最近の報告を紹介することを通して，圧延荷重式から逆算した摩擦係数の問題について検討を行つた．その結果，ロールと材料間に潤滑をほどこした場合，接触面でクーロンの法則が成り立つのはまれで流体潤滑理論の導入が必要であることが明白になつた．そこで，流体潤滑理論の基礎式を導出し，この基礎式を用いて入口部での油膜厚み及びロールと材料間のせん断応力についての解析を行つた．

また潤滑油の油膜厚みがロール及び材料の表面おうとつと同程度およびそれ以下での流体潤滑と境界潤滑とが混在する混合潤滑における解析の試論についても検討を行つた．

実際への応用例として，最近問題になつている表面欠陥の解決に対して潤滑理論を適用することについて検討を加えた．今後の潤滑理論の研究方向としての混合潤滑理論については未だ試論の域にあり，これからの発展が期待される．

本稿をおわるにあたり，単なる文献の紹介になつてしまい，潤滑理論の本来の姿及び実際への応用の問題点について説明不足の感がすることまた，見落した研究報告紙面上の都合で紹介できなかつたものが数多くあつたことについてお詫びする次第である．しかし，本稿に少しでも興味を抱いていただければ幸いである．

おわりに，本稿をまとめるにあたり御助言頂きました東京大学工学部宮川松男教授，木原諄二助教授，大阪大学工学部斉藤好弘助教授，東京大学宇宙航空研究所木村好次助教授，東京農工大山本隆司助教授，日本鋼管技術研究所有村透博士の各氏に深く感謝の意を表します．

文献

1) *von* KARMAN: Z. f. angrew: Math. u. Mech., 5 (1925), p. 139
2) *E.* OROWAN: Proc Inst. Mech. Engr., 150 (1943) 4, p. 140
3) *D. R.* BLAND and *H.* FORD: Proc. Inst. Mech. Engr., 159 (1948) 39, p. 144
4) *R. B.* SIMS: JISI, 170 (1954), p. 19
5) 日本鉄鋼協会編：「圧延理論とその応用」誠文堂新光社 (1969)
6) 水野高爾：塑性と加工，10 (1969)-9 102, p.521
7) *R. B.* SIMS and *D. F.* ARTHUR: JISI, 168 (1952), p. 285
8) *M. P.* STONE: Iron and Steel Engr., 30 (1953), p. 61
9) *W.* TRINKS: Blast Furn. Steel Pl., (1937) July
10) *R. J.* NEKERVIS and *R. M.* VANS: Proc Assoc. Iron Steel Engr. (1948)
11) *G. E.* STOLZ and *J. W.* BRINK: Proc. Assoc. Iron Steel Engr. (1950), p. 654
12) *H.* INHABER: Trans. ASME, (1966), p. 421
13) *W. C. F.* HASSENBERG and *R. B.* SIMS: JISI, 168 (1951), p. 155
14) *W. L.* ROBERTS: "Friction and Lubrication in Metal Processing" ASME, New York, (1966), p. 103
15) 佐伯邦男，橋本宥司：塑性と加工，7 (1966-4)63 p. 183
16) 鈴木正道：塑性と加工，10(1969-2)97, p. 81
17) 岡本豊彦，河野輝雄，永井博司：第22回塑性加工連合講演会講演論文集，(1971)，p. 25
18) 鐔田征雄，磯辺邦夫，中川吉左衛門：第23回塑性加工連合講演会講演論文集，(1972)，p. 355
19) 五弓勇雄，木原諄二，小豆島明：塑性と加工，15 (1974-5) 160, p. 400
20) 中島浩衛：圧延理論部会20周年記念シンポジューム「圧延研究の進歩と最近の圧延技術」(1974)，p. 1
21) 小豆島明，永森弘之，木原諄二，五弓勇雄：塑性と加工，18 (1977) 194, p. 189
22) 加藤健三ら：昭和49年度塑性加工春季講演会講演論文集，(1974)，p. 145
23) *G. T. von* ROOYEN and *W. A.* BACKOFEN: JISI, 175 (1957), p. 235
24) 松浦佑次，本村 貢：塑性と加工，9 (1963) 86, p. 173
25) 小豆島明：機械学会論文集，43(1977) 371, p. 2557
26) 千々岩健児，畑村洋太郎：機械学会誌，74 (1971)，p. 923
27) *H. S.* CHENG: "Friction and Lubriction in Metal Processing" ASME, New York, (1966), p. 69 ~89 Blast hydrodynamic lubrication
28) 富沢儀一，一ノ井二郎：潤滑，17(1972)5, p. 327
29) 水野高爾：塑性と加工，7 (1966) 66, p. 383
30) *D.* DOWSON and *G. R.* HIGGINSON: "Elasto-Hydrodynamic Lubrication" Pergamon Press (1966) Chap. 7.
31) *W. R. P.* WILSON and *J. A.* WALOWIT: Trans. ASME, F93 (1971), p. 69
32) *R. W.* SNIDLE, *D.* DOWSON and *B.* PARSONS;

Trans. ASME, F95 (1973), p. 113
33) *W. R. D.* Wilson and *S. M.* Mahdavian: Trans. ASME, F96 (1974), p. 572
34) 小豆島明，木原諄二，宮川松男：昭和52年度塑性加工春季講演会講演論文集，(1977)，p. 1
35) *T. A.* Dow, *J. W.* Kannel, and *S. S.* Bupara: Trans. ASME, F97 (1975), p. 4
36) *W. R. D.* Wilson and *L. E.* Murch: Trans. ASME, F98 (1976), p. 426
37) *H.* Christensen: Proc Inst. Mech. Engr., 184 (1972), p. 421
38) *Y. H.* Tsao and *K. N.* Tong: ASLE, 18 (1974), p. 90
39) 小豆島明，木原諄二，宮川松男：昭和52年度塑性加工春季講演会講演論文集，(1977)，p. 421
40) *Y. H.* Tsao and *L. B.* Sargent: ASLE, 21 (1977), p. 1
41) 曾田範宗：「軸受」岩波書店，(1964)
42) *J. W.* Kannel and *J. A.* Walowit: Trans. ASME, F93 (1971), p. 39
43) *H.* Christensen and *K.* Tonder: Trans. ASME., F95 (1977), p. 166
44) *D. B.* Hamilton, et al.: Trans. ASME, D88 (1966)
45) 有村 透，岡戸 克，升田貞和：日本鉄鋼協会第93回講演大会講演概要集，(1977)，p. 224