

論 文

UDC 621.746.047 : 669.14-404 : 669.063.8 : 669.046.5 : 538.52 : 661.939.3 : 532.5 : 620.192.5

鋼処理操作における 2, 3 の乱流流れの問題*

Julian SZEKELY**・浅井 滋生***

Some Turbulent Fluid Flow Problems in Steel Processing Operations

Julian SZEKELY and Shigeo ASAI

Synopsis:

Through the use of turbulent flow theory a mathematical representation is proposed for a range of steel processing operations where turbulent mixing plays a major role in determining the efficiency of the process. The resultant differential equations were solved numerically, using a digital computer.

The examples discussed in the paper include mixing in argon-stirred ladles, the flow patterns in the liquid pool of continuous casting systems, the flow field induced by an electromagnetic force field in continuous casting and flow patterns in rimming ingots.

The computed results indicate that velocities as high as 30 cm/s may be found in these systems and that the eddy diffusivities may have values as high as 500 cm²/s. The computed results were found to be in reasonable semi-quantitative and in some cases quantitative agreements with results of experimental model tests. While the computer requirements are quite substantial, some 5-10 minutes on a CDC 6400 (state university of New York at Buffalo), the approach outline here seems attractive because it provides a much improved insight into the structure of the flow field and a more solid basis for further studies of inclusion coalescence, inclusion entrapment, electromagnetic stirring, and mass transfer in steel processing.

1. 結 言

多くの製鋼プロセスで、乱流の循環運動が果たしている役割は大きい。例えば、LD 転炉における迅速な脱炭反応は浴の乱流混合とスラグ-メタルエマルジョンの循環によるものであるし¹⁾²⁾、真空脱ガス装置でも乱流混合と溶鋼の循環が脱ガス効率の決定に大きく作用する。また、アルゴン攪拌や電磁誘導攪拌は浴内に乱流循環運動を引き起こし、温度、濃度の均一化と脱酸反応を促進する。さらに、連铸ではノズルからの流れがプール内に乱流混合をもたらし、それが介在物の分布や凝固組織に影響して製品の品質を大きく左右することが知られている。

現在までになされてきた冶金反応装置での乱流混合と循環に関する研究はそのほとんどが経験的なものであり、また実験室規模の装置で拡散係数や混合時間を測定したものであった^{3)~5)}。

乱流が関与する現象を深く理解するには、装置内の乱れの大きさや速度場の定量的記述と測定が必要となる。

乱流現象についての研究は過去 50 年間、多くの注目を集めてきたが、最近、初めて先駆者としての SPALDING⁶⁾の努力によつて、複雑な乱流の循環流を定量的に計算できるようになった。

著者らは乱流理論とその計算法を鋼の製錬過程で見られる流れの問題に適用する研究を進めているが、ここでは、今までに行なわれた研究の一部を述べる。一般に、乱流現象についての解明はまだ不十分であり、簡単な乱流モデルを使つた場合でも膨大な計算時間が必要となる。しかしながら、ここで述べる方法は冶金装置内の流れの問題を一層深く洞察することになると考えられる。

さらに、流体の速度や乱れを冶金装置内で直接測定することは難しいので、その意味からもこの計算による方法は興味あると考えられよう。

本モデルの適用例を以下に示すが、その際可能な限り

* 昭和 49 年 11 月本会講演大会にて発表 昭和 49 年 10 月 4 日受付 (Received Oct. 4, 1974)

** New York 州立大学 D. Sc., D.I.C. (New York State University)

*** 名古屋大学工学部 工博 (Dept. Iron and Steel, Nagoya University, Furô-cho Chikusa-ku, Nagoya 464)

実測値との比較に努めた。

- i) アルゴン攪拌による取鍋内溶鋼の混合
- ii) 連続鋳造における流体の流れとその効果
- iii) 電磁誘導攪拌による流動場
- iv) リミシング反応による鋳型内溶鋼のフローパターン

2. 理 論

溶鋼中の乱流循環運動を表わすにあたり、軸対称の円筒座標系で非圧縮性のニュートン流体を考えることにする*。今、 z と r を軸方向と半径方向の座標にとり、それぞれに相当する速度を V_z と V_r とする。目的とするのは、上昇気泡、衝突ジェット、電磁誘導力などの推進力で作出される系の速度場（と混合特性）を記述することである。

乱流粘性係数を求める適当な関係式と連続の運動の式を合わせて用いれば、問題を一般的に記述できる。推進力の項（例えば、衝突ジェット、上昇気泡など）は境界条件を介して現われ、体積力の項（例えば、電磁誘導力）はうず輸送方程式の生成項に現われる。

2.1 制御方程式

軸対称座標系での連続と運動の方程式については文献[7]などで得られるのでここでは改ためてくり返さないが、計算の便宜上、連続と運動の方程式を次に定義する“うず”度（ ξ ）と流れ関数（ Ψ ）を使つて書く。

$$\xi = \frac{\partial V_r}{\partial Z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$V_r = -\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \dots\dots (2), (3)$$

r と z 成分の運動方程式から、うず度輸送方程式は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} & r^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\xi}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\xi}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ r^3 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\mu_e \frac{\xi}{r} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e \frac{\xi}{r} \right) \right\} \\ & + r^2 \left\{ \frac{\partial f_z}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial Z} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで、 μ_e は有効粘性係数であり、(5)式で表わされる。

$$\mu_e = \mu + \mu_t \quad \dots\dots\dots (5)$$

f_z と f_r は z と r 方向の体積力である。

流れ関数とうず度の関係は(1)～(3)式を使つて次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \xi = 0 \quad \dots\dots (6)$$

* 類似の表現が2次元の直角座標系についても展開できる。

上記の(1)～(6)式は、乱流(うず)粘性の項を除けば層流の場合の記述と一致するものである。乱流粘性係数 μ_t は層流のそれとは異なり、流体固有の物性値ではなく、むしろ位置に強く依存し、乱流の構造によつて決定されるものである。乱流モデルではこの乱流粘性係数(μ_t)をいかに表現するかがもつとも重要なことのように思われるので、この問題について次に簡単に述べる。

2.2 乱流粘性係数の表現法

後で述べる実際の計算では、乱流粘性係数を見積るために2つのモデル、“One Equation”モデルと“Two Equation”モデルを用いる。この分類はLAUNDERら⁸⁾に従つたものであり、それぞれの利点、欠点については文献[8]で詳しく知ることができる。

“One Equation”モデル

このモデルは乱流粘性係数の表現に、Kolmogorov-Prandtlのモデルを用い、一つの乱流エネルギー保存式で、その値を見積るものである。乱流粘性係数は(7)式のように表示される。

$$\mu_t = \rho K^{1/2} / l \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 l は乱れの大きさであり、 K は乱流エネルギーで、(8)式の乱流エネルギー収支式を解いて得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial Z} \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial r} \right\} = r(\Omega - N) \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 Ω は(9)式で定義される乱流エネルギーの生成速度である。

$$\Omega = 2\mu_t \left\{ \left(\frac{\partial V_z}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial Z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

そして N は乱流エネルギーの消失速度を表わし、次のように書かれる。

$$N = C_d \rho K^{3/2} / l \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 C_d は定数で $C_d \approx 0.416(-)^{9)}$ である。

“One Equation”モデルでは微分方程式の数値解を求める上で、“Two Equation”モデルに比べ余分の時間がかからない利点を持つが、それを乱流の循環流れに適用する際には、乱れの大きさ l をどのように取るべきかという問題が残る。しかしながらこのモデルを十分に発達した円管内の乱流に適用する場合には、 l として次に示すNIKURADSEの表現を用いることができよう。

$$l/R = 0.14 - 0.08(r/R)^2 - 0.06(r/R)^4 \quad \dots\dots\dots (11)$$

本研究では、連続鋳造の流れの場を記述する場合に限り“One Equation”モデルを採用したが、この適用は近似的に妥当と考えられる。循環運動が支配的と思われる

他の系については、計算時間は増すが“Two Equation”モデルを用いた。

“Two Equation”モデル

このモデル（以後このモデルを K - W モデルと呼ぶ）では、乱流粘性係数を次のように表わす。

$$\mu_t = \rho K / W^{1/2} \dots \dots \dots (12)$$

ここで、乱流エネルギー、 K 、と乱流運動の確率的特性値、 W はそれぞれ微分方程式を解いて求められる。このモデルは乱れの大きさ、 l 、を陽には含んでいないが、必要な場合には次の関係から推定できる。

$$l = (K/W)^{1/2} \dots \dots \dots (13)$$

この K - W モデルで、乱流エネルギー、 K 、は前に与えた(8)式*を用いて計算できるが、 W について次式を使って求める。

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(W \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(W \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_w} \right) \frac{\partial W}{\partial Z} \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_w} \right) \frac{\partial W}{\partial r} \right\} = r S_W \dots \dots \dots (14)$$

(14) 式で S_W は W の生成、消失の項を加え合せたもので、次のように表わされる。

$$S_W = C_1 \mu_t (\text{grad } \xi)^2 + C_3 (W/K) \Omega - C_2 \rho W^{3/2} \dots \dots \dots (15)$$

(12)~(15) 式は数多くの“定数”を含んでいるが、SPALDING⁹⁾はこれらに次に示す値を与えた。

$$C_d = 0.09, C_1 = 3.5, C_2 = 0.17, C_3 = 1.04,$$

$$\sigma_K = 0.9, \sigma_w = 0.9$$

上に示した定数値は平板上の混合層の広がりやジェット軸上の速度減衰の実験から決められたもので、確定的なものではない。個々の系でこの定数を決めることが望ましいのであるが、現状ではその情報を欠いているので、後述する計算に当つては上に挙げた値を用いる。

定数値が不確実であるにもかかわらず、この K - W モデルによれば、乱れの大きさ l が循環流れの場で計算できることになる。しかし、1つ余分の微分方程式が加わったのでその分だけ計算時間が増加することはまぬがれない。

2.3 乱流系の混合

ここで特に興味あることは、上述の定式化が乱流循環系の混合を正確に表現することである。トレーサー濃度を C とすれば、トレーサーの混合過程は数学的に次のように記述できる。

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} + V_r \left(\frac{\partial C}{\partial r} \right) + V_z \left(\frac{\partial C}{\partial Z} \right) = E \left(\frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} \right)$$

* K - W モデルで(8)式を用いる場合、生成項、消失項として前に与えた(9)式と(10)式を用いることになるが、その際必要となる l は(13)式から求められる。

$$+ (E/r) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) \dots \dots \dots (16)$$

ここで、 θ は経過時間、 E は有効拡散係数であり、(17)式より見積ることができる。

$$E = E_l + D = K / W^{1/2} + D \dots \dots \dots (17)$$

E_l はうず拡散係数、 D は分子拡散係数である。第1近似として、乱流シュミット数 σ_e を1とすれば、乱流粘性係数 μ_t からただちに E_l は計算できる。

この表示では、有効拡散係数はもはや実験データに合致するように選ばれたパラメータではなく、系の乱れの大きさに結び付いたパラメータで、理論的に算出できる量である。

(16)式で、乱流混合のモデルを反応を伴わないトレーサーについて記述したが、この取り扱いには反応を伴う場合にも拡張できることは明らかである。

2.4 熱エネルギー収支式

数多くのプロセスで、乱流の循環運動は熱移動を伴う。連続鑄造のプールからの熱移動やアルゴン攪拌されるメタルからのそれはよい例である。このような状況下では、熱は対流と分子およびうず伝導によつて運ばれ、熱エネルギー収支式は次のようになる。

$$V_r \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + V_z \left(\frac{\partial T}{\partial Z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(k + \frac{k_T}{\sigma_T} \right) \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \left(k + \frac{k_T}{\sigma_T} \right) \frac{\partial T}{\partial Z} \right\} + \dot{q}(r, Z) \dots \dots \dots (18)$$

ここで、 k_T はうず温度拡散係数で、(19)式から見積ることができる。

$$k_T = \sigma_T \times (\mu_t / \rho) = \sigma_T K^{1/2} l \dots \dots \dots (19)$$

σ_T は乱流プラントル数であり、第1近似として0.7とする。 $\dot{q}(r, z)$ は熱の生成および消失項である。なお、連続鑄造の場合には熱収支式が複雑になるため、後ほどに詳しく述べることにする。

2.5 電磁誘導攪拌

数多くの重要な冶金プロセスで、電磁力を応用しての攪拌が行なわれている。これを数式で記述するためには電磁力に基づく体積力の項を乱流の Navier-Stokes 式に付け加えることになる。

一方、電磁場を求めるには MAXWELL の式を解かねばならないが、流動している系についての MAXWELL の式は次のように書かれる。

$$\nabla \times \underline{E} = -\mu_0 \frac{\partial \underline{H}}{\partial \theta} \dots \dots \dots (20)$$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} \dots \dots \dots (21)$$

$$\nabla \cdot \underline{H} = 0 \dots \dots \dots (22)$$

$$\underline{J} = \sigma (\underline{E} + \mu_0 \underline{V} \times \underline{H}) \dots \dots \dots (23)$$

ここで、 $\underline{E}$ は電場、 $\underline{H}$ は磁場、 $\underline{J}$ は電流密度、 μ_0 は鋼

の透磁率, σ は電気伝導度, V はメタルの流速である.
(20), (21), (22) 式を組み合わせると磁場の輸送方程式が得られる.

$$\nabla^2 \tilde{H} + \mu_0 \sigma \nabla \times (\tilde{V} \times \tilde{H}) = \mu_0 \sigma \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} \quad \dots\dots\dots (24)$$

交流による周期的な磁場については, (24) 式は次のように書ける.

$$\nabla^2 \tilde{H} + \mu_0 \sigma \nabla \times (\tilde{V} \times \tilde{H}) = \mu_0 \sigma \tilde{H} j \omega \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで, ω は交流の周波数である.

(25) 式は流体の速度場 V を含むので, (25) 式を解くには乱流の Navier-Stokes 式と組み合わせて解かねばならない. しかしこの手続には膨大な計算が必要となり, 現実的でない. そこで, 電磁力による速度場の第 1 近似を得る目的で, H は厚み方向 X だけの関数とみなし, 流速 V は一定で, 平行流と仮定する. 後ほど示すように, この仮定によつて, (25) 式を解析的に解くことができ, これを使つて体積力を求め (4) 式に代入すれば速度場の第 1 推定値を得ることができる. この方法は非常に低い周波数の場合を除いて, 少なくとも溶鋼については精度の高い推定値を与えるものである.

体積力を得るため, 直角座標を用いて, H の X と Z 成分を次のように書く.

$$H_Z = H_Z(X) \operatorname{Re} \{ \exp j(\omega \theta - \gamma Z) \} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$H_X = H_X(X) \operatorname{Re} \{ \exp j(\omega \theta - \gamma Z) \} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで, Re は複素数の実数部を表わす.

(26) 式と (27) 式は一定速度で Z 方向に伝わる磁場を表わしている. 今, (25) 式の Z 成分に着目して次の手続きを取る.

(a) (26) 式を代入する.

(b) 平行流の仮定を用いる. すなわち

$$\frac{\partial}{\partial Z} (\tilde{V} \times \tilde{H})_X = V_X = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

すると, $H_Z(X)$ に関する次の関係式が得られる.

$$d^2 H_Z / dZ^2 - \beta^2 H_Z = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで, $\beta^2 = \gamma^2 + j\omega \mu_0 \sigma (1 - \gamma V_Z / \omega)$ である.

(29) 式は (30) 式の境界条件のもとで容易に解けて (31) 式を得る.

$$X = X_0 \text{ で } H_Z = H_0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$H_Z = H_0 \cosh \beta X / \cosh \beta X_0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

そして, $H_X(X)$ は (31) 式を使つて (22) 式から直接得られる.

$$H_X = j\gamma H_0 \sinh \beta X / \beta \cosh \beta X_0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

(31) 式と (32) 式を (21) 式に代入して電流密度, $\tilde{J}$ を得る.

$$J_Y = \frac{H_0 (\beta^2 - \gamma^2) \sinh \beta X}{\beta \cosh \beta X_0}, \quad J_Z = J_X = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

この解析で目的としている媒体中に誘導される電磁力は (34) 式で表わされる¹⁰⁾.

$$\tilde{f} = \mu_0 \tilde{J} \times \tilde{H} \quad \dots\dots\dots (34)$$

(31), (32), (33) 式を (34) 式に代入して整理すると $\tilde{f}$ の各成分について (35) 式を得る.

$$f_Z = \frac{\mu_0^2 H_0^2 \omega \sigma \gamma (1 - \gamma V_Z / \omega)}{\sqrt{\gamma^4 + \{\mu_0 \sigma \omega (1 - \gamma V_Z / \omega)\}^2}} \cdot \frac{\cosh 2\beta_r X - \cos 2\beta_i X}{\cosh 2\beta_r X_0 + \cos 2\beta_i X_0}, \quad f_X = f_Y = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここで, β_r と β_i はそれぞれ β の実数部と虚数部を表わす. 最後に, (35) 式を微分すれば (36) 式を得るが, これを (4) 式に代入して, 問題の記述を終ることになる*.

$$\frac{\partial f_Z}{\partial X} = \frac{\mu_0^2 H_0^2 \omega \sigma \gamma (1 - \gamma V_Z / \omega)}{\sqrt{\gamma^4 + \{\mu_0 \sigma \omega (1 - \gamma V_Z / \omega)\}^2}} \cdot \frac{2\beta_i \sin 2\beta_i X + 2\beta_r \sinh 2\beta_r X}{\cos 2\beta_i X_0 + \cosh 2\beta_r X_0} \quad \dots\dots\dots (36)$$

2.6 介在物粒子の浮上

流体の流れを研究するうえで興味あることは, 介在物粒子の浮上, 引いては最終製品の品質を支配する因子を明らかにすることができることである.

静止液中で介在物がストークスの法則に従つて終末速度で上昇するとすれば, その速度は (37) 式で表わされる.

$$V_p = (2/9) (\rho - \rho_p) (D_p/2)^2 g / \mu \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここで, D_p は介在物粒子径, g は重力加速度である. 流動する液体中では, (37) 式で表わされる速度は粒子の垂直速度成分と媒体の相対速度となり, 粒子の絶対速度は次のようになる.

$$V_{Z,p} = V_Z - V_p \quad \dots\dots\dots (38)$$

1 個の粒子が微小時間, $\Delta \theta$, の間に, 微小距離, Δl , だけ移動したとすれば, この, Δl , は次のように半径方向成分と垂直方向成分にわけられる.

$$\Delta r = \Delta l V_r / \sqrt{V_r^2 + V_{Z,p}^2} \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\Delta Z = \Delta l V_{Z,p} / \sqrt{V_r^2 + V_{Z,p}^2} \quad \dots\dots\dots (40)$$

流体の速度 V_Z と V_r を知れば, (39) 式と (40) 式をくり返し使つて, 介在物粒子の軌跡を計算することができる.

2.7 計算方法

今まで述べて来た流動を記述する方程式を適当な境界条件のもとで解けば系の乱流特性の情報とともに速度 V

* 後述するように, 電磁力によつて誘導される流れの例題では直角座標を用いた. そのため (36) 式を (4) 式に代入する際, 円筒座標で書かれた (4) 式を直角座標系に書きあらためる必要がある. 座標系の変換は文献[7]で得られる.

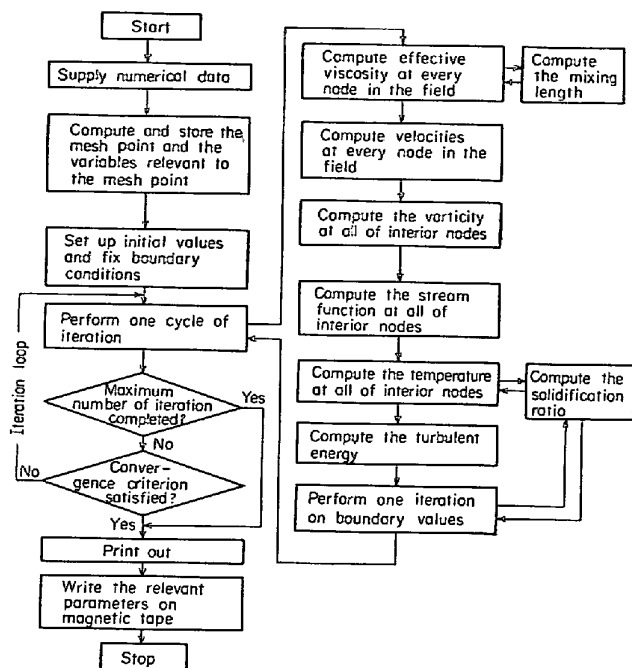


Fig. 1. Simplified block diagram of the computer program.

ロフィールを得ることができる。計算結果を抜粋して次章に示す。

この流れの問題を解くために採用した方法は GOSMAN ら⁶⁾によつて述べられたものであり、最終的には、微分方程式を一連の代数方程式にして繰り返し法で解くものである。

連続鋳造の問題を解くために用いた計算のフローチャートを Fig. 1 に示す。計算は New York 州立大学 (Buffalo) の CDC 6400 電子計算機で行なつた。連鋳の計算の場合、FORTRAN IV で書かれたプログラムをコンパイルするのに用いた時間は約 10 sec、典型的な計算には約 300 sec かかった。続いて述べる例題では、計算時間は 100~800 sec の範囲であつた。

計算の収束基準としては (41) 式を採用し、これが満たされるまで計算をくり返した。

$$\sum_{j=1}^n |(X_j - X_j^0)/X_j| < \epsilon \quad \dots\dots\dots (41)$$

ここで ϵ は対象とする系に応じて、0.05~0.001 の範囲の値を採用した。

連鋳での介在物の浮上やアルゴン攪拌取鍋中のトレーサーの分散を計算する場合には、流れの問題を解いて得た情報 (例えば、速度プロフィール、乱流エネルギーなど) を磁気テープ上に格納しておいて、あらためてこの情報を磁気テープより読み込んで計算を行なつた。

3. モデルの適用

次に、速度場や混合特性を計算する場合、どのようにモデルを用いるかを示す。

3.1 アルゴン攪拌による取鍋内溶鋼の混合

この攪拌は脱酸剤の均一化と介在物の浮上を促進する目的で用いられる実用上重要なものである。

Fig. 2 に示すように、底の中央に設けたボラスプラグからガスを吹き込んで攪拌する円筒形の取鍋を考える。

この問題は (1)~(6), (8)~(10), (12)~(15) 式と境界条件で記述することができる。この場合、乱流モデルとして “Two Equation” モデルを用いた。

この数学的モデル (円筒座標から直角座標の 2 次元系に作りなおしたもの) の妥当性を検討する目的で、2 次元の長方形の装置 (47×47×(2.5) cm) を用いて、底部に取り付けたオリフィスを通して空気の水を攪拌し、物理モデル実験を行なつた。フローパターンの撮影にはポリスチレンの粒子を用い、混合時間は染料を添加して測つた。

Photo. 1 に実験で得たフローパターンを示す。この図

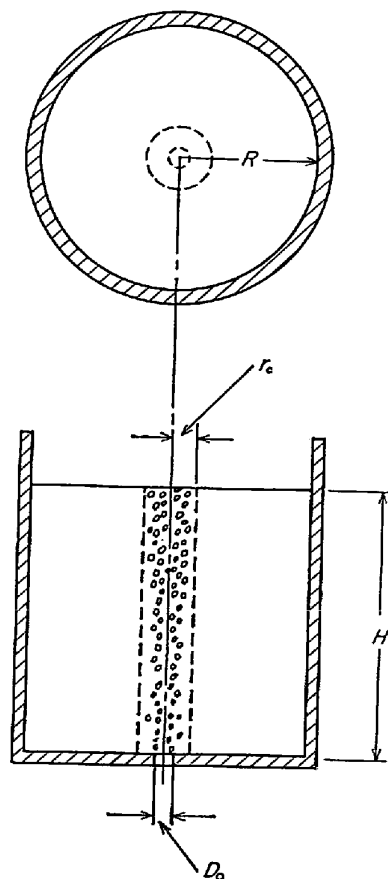


Fig. 2. Sketch of ladle stirred by argon gas.

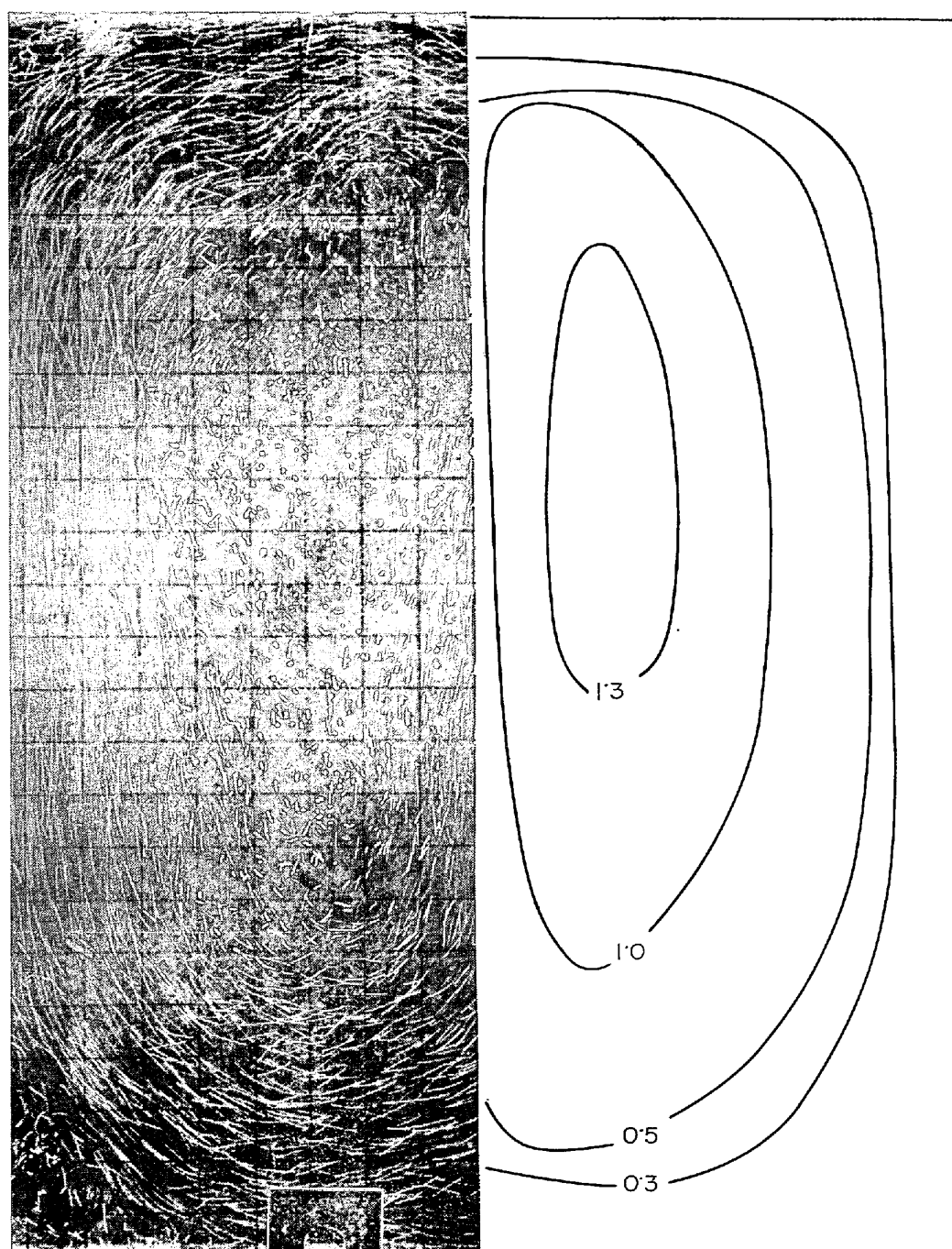


Fig. 3. Comparison of the computed and the measured stream-line pattern (numbers on curves denote values of dimensionless stream function).

からわかるように吹き込みガス流が対称的な 2 つのセルを作り出している。Fig. 3 では、右側に計算から得た流線を示し、左側に写真撮影から求められたものを示したが、両者はよく一致している。Fig. 4 には速度分布を示したが、そこには速度ベクトルの方向と絶対値が合わせて示してある。この結果を見ると中心近傍の自由表面に実際現象とはかけ離れた高い速度の部分がみられる。これは多分自由表面の境界条件を単純化しすぎたことによるものと考えられる。しかしながらその他の部分につい

ては、速度分布は实际的であり、観察結果と一致している。すなわち、Photo. 1 と Fig. 3 からわかるように、壁近傍では速度は早く、中央部には比較的静かな領域が存在する。Fig. 5 では、モデル実験で得た吹き込み空気量に対する混合時間をプロットし、計算から求めたそれと比較した。実測値と計算値の間にはよい一致が得られている。

さて、この研究における最終目的は実際の冶金装置での混合を知ることであるが、最近、中西ら¹²⁾はトレーサ

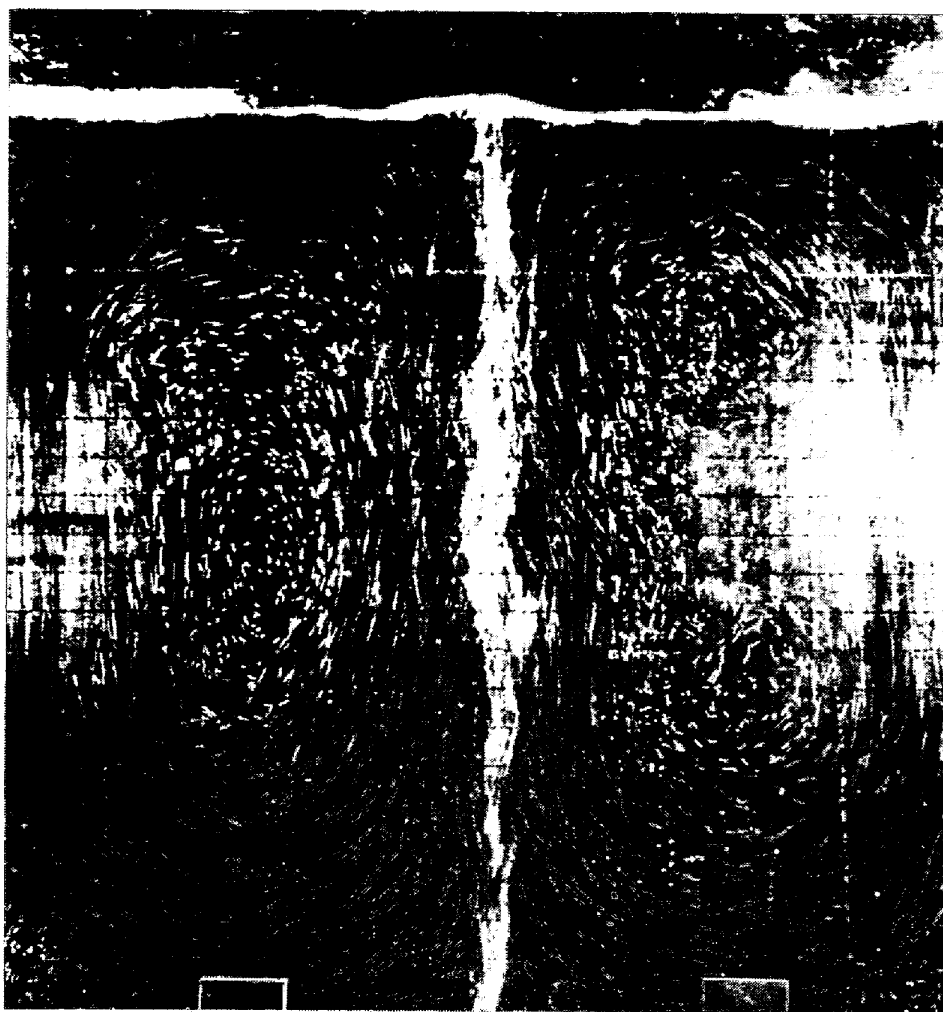
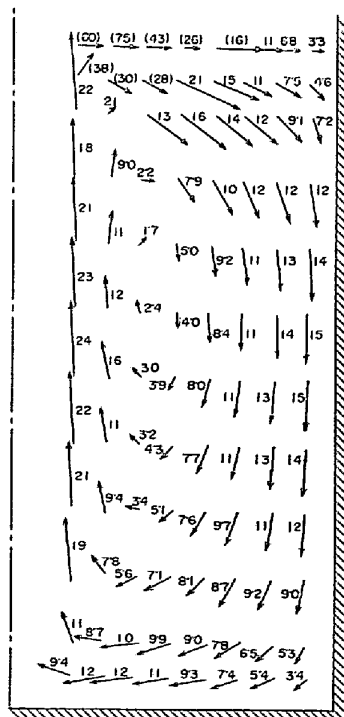


Photo. 1. Flow pattern in the two-dimensional model experiment.



←Fig. 4. Computed velocity profiles (arrows denote direction of velocity vector and the numbers correspond to the absolute values of velocity, cm/s)

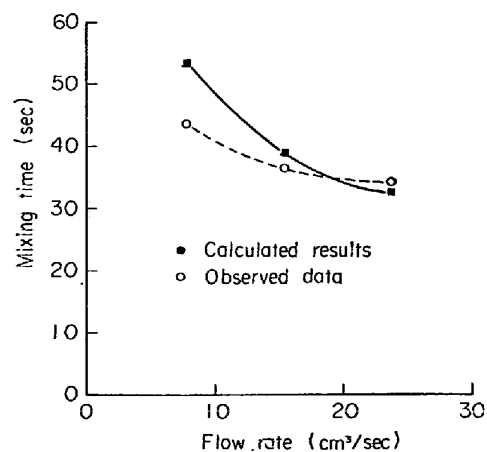


Fig. 5. Comparison of the predicted and the experimentally measured mixing times for the water model tests.

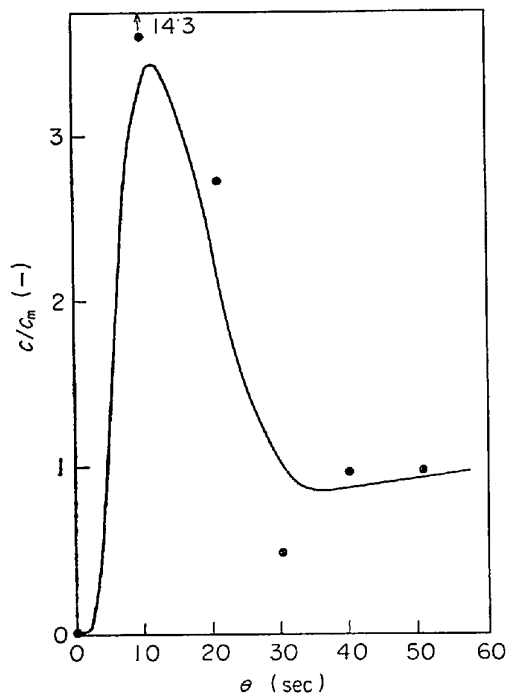


Fig. 6. Comparison of experimentally measured and the predicted tracer concentration.

ーとして放射性コバルト 60 を使つて、10 sec 間隔のサンプリング値から 50 t の VOD 炉の混合状況を調べ、すぐれた結果を得ている。Fig. 6 は、この実験から得られたトレーサー濃度の実測値と本モデルによる計算値との比較を示す。実験に用いられた系は軸対称ではなく、一方、計算の場合にはそれを仮定せねばならなかつたため、測定値と計算値とはよい一致を示してはいるが、これはあくまで半定量的と見るべきである。

3.2 連続鋳造における流体の流れとその効果

連続鋳造装置は広範囲にわたりいろいろな利点を有するため、種々の角度から多くの研究がなされて来た。研究の初期には凝固殻厚みに関する実験や理論的研究が行なわれたが、最近では、表面性状を支配する因子や製品中の介在物といった研究に移行している^{13)~16)}。また、この点に関して、多くの研究者が有益な水モデル実験による研究を報告している^{17)~20)}。この結果、現象についての完全な理解にはほど遠いが、今日、連続鋳造プロセスについての理解はかなり進歩したと考えられる。

ところで、今までの伝熱解析では、流体の流れの効果を無視し、溶鋼の熱伝導度として人為的に取つた大きな“有効”値を使つて乱流混合を表わしてきた。また、流体の流れを定量的に記述した研究では、熱移動や凝固の効果が加味されておらず、その点から多少単純化しすぎていると言えよう。

ここでは、熱移動および、それに伴う固層、共存層の

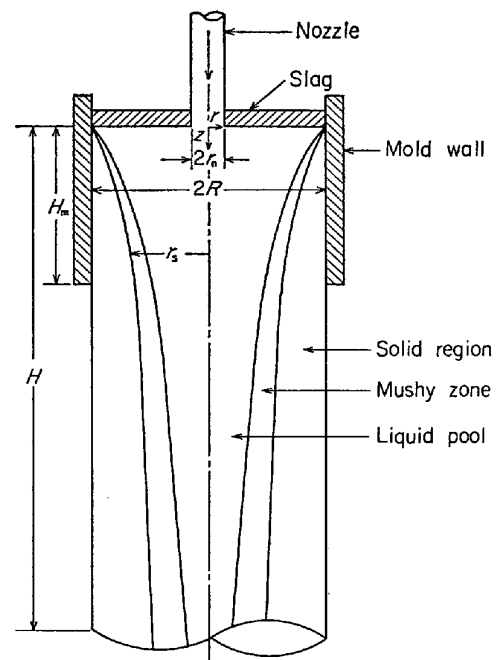


Fig. 7. A sketch of a continuous casting system.

成長とプール内の乱流の流れの両者を考慮した連続鋳造プロセスの数学的モデルを示す。このような方法は計算上複雑な手続を要することとなるが、それは連続鋳造プロセスをより正確に表わすことになる。ここでは、凝固プロファイルやトレーサーの分散についてモデルから得られた結果と実稼働装置のデータを比較する。さらに種々の操業条件下で、非金属介在物が固層に捕獲されるまでの軌跡を示す。

Fig. 7 に示すような、注入流がプール内の液を攪拌する連続鋳造装置の上部を考える。乱流粘性係数の表現と境界条件および(1)~(11)式と後述する(42)、(43)式が問題の数学的記述を与えることになる。特に、乱流粘性係数の表示には“One Equation”モデルを用い、乱れの大きさ l の推定には NIKURADSE の表現を用いた。

前に示された(18)式を用い、液相、共存相、固相について個別の式を展開するかわりに、各相で成り立つ次式を用いる。

$$\left\{ 1 + \left(\frac{-\Delta H}{C_p} \cdot \frac{\partial f_l}{\partial T} \right) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial Z} \left(T \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(T \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \right) \right\} \quad \text{(共存層中の潜熱) (対流項)}$$

$$= \rho \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(k + \frac{k_T}{\sigma_T} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right\} + \rho \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ r \left(k + \frac{k_T}{\sigma_T} \right) \frac{\partial T}{\partial Z} \right\} \quad \dots\dots\dots (42)$$

(うずと分子伝導による熱移動)

ここで、液相分率、 f_l は平衡凝固を仮定して推算する。

$$f_l = 1 - \frac{1}{m-1} \left\{ \frac{MC_i}{T_m - T} - 1 \right\} = 1 - f_s \quad \dots (43)$$

$f_l \geq 1$ なら $f_l = 1$ 液相

$0 < f_l < 1$ なら $f_l = f_l$ 共存層

Table 1. Numerical values of the parameters used in the calculation of Figs. 8, 9, 10 and 11.

Diameter of mold	11.5 cm
Diameter of nozzle*	3 cm
Mold length*	50 cm
Casting speed	3.17 cm/sec
Casting temperature	1550°C
Carbon content	0.11%
Equilibrium partition coefficient	0.2 (-)
Heat transfer coefficient in the mold**	0.0306 cal/cm ² sec °C
Heat transfer coefficient below the mold**	0.0258 cal/cm ² sec °C
Thermal conductivity of steel	0.827 cal/cm sec °C

* These were guessed.

** These were estimated from reference (24).

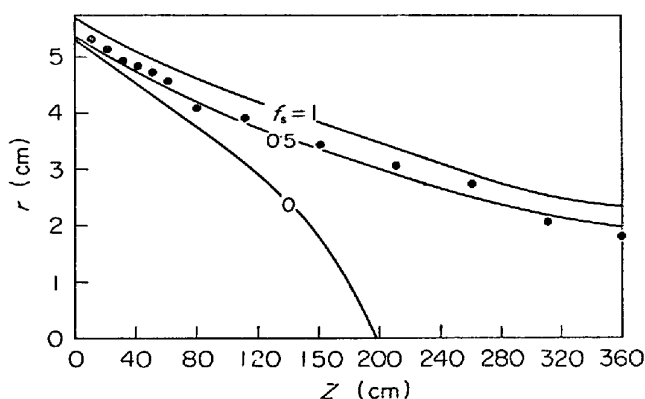


Fig. 8. Comparison of the computed profiles of solid fraction with the experimental measurements of the shell thickness obtained by Ushijima²².

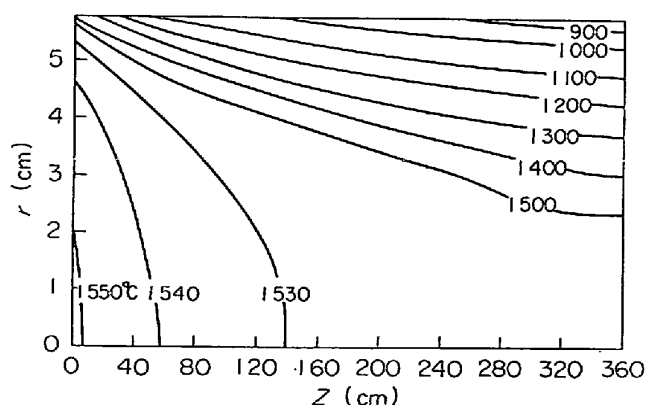


Fig. 9. Computed temperature profiles for conditions specified in table 1.

$f_l \leq 0$ なら $f_l = 0$ 固層

ここで T_m は溶媒の融点, M は液相線の勾配, m は平衡分配係数, C_i は溶質濃度, f_s は固相分率である.

液相分率を温度で微分したもの, $(\partial f_l / \partial T)$ は定義により液相と固相では零となるので (43) 式は液相, 共存相, 固相で成立することになる.

一連の計算結果を Fig. 8~13 に示す. Fig. 8~11 はピレットタイプの連铸機に関するもので, その主要なパラメータを牛島の報告²²⁾に基づいて Table 1 に示した. Fig. 8 は等固相分率のプロフィールで, それぞれ 1, 0.5, 0 に相当するものを示した. また, 実測値との比較をするため牛島による凝固殻のデータ²²⁾も示した. 実験で得られた凝固殻のプロフィールは固層前面の共存相内の位置を意味するかのようになり, 固層分率 0.5 の計算プロフィールにほぼ一致した.

Fig. 9 は温度プロフィールの計算結果を示す. この図から熱は液のプールから迅速に移動することがわかる. これはすでに観測されていることであり, 任意に与えた“有効熱伝導度”を使つてこの現象を取り扱った数学的モデルが提出されている²³⁾. しかしながらここでは, より基礎的な取り扱いによつてこの現象を表わした.

Fig. 10 は軸方向の速度成分, V_z , のプロフィールを

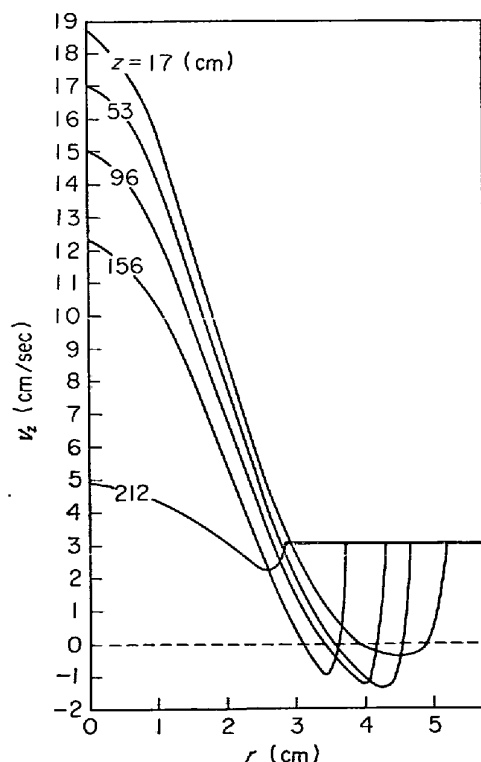


Fig. 10. Computed axial velocity profiles at various axial positions (z) for conditions given in table 1.

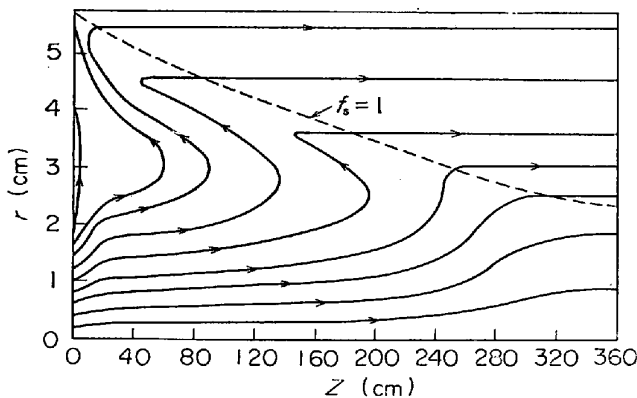


Fig. 11. Computed location of the non-metallic inclusions for 100μ particles for conditions specified in table 1. The broken line indicates the curve corresponding to 1.0 solid fraction.

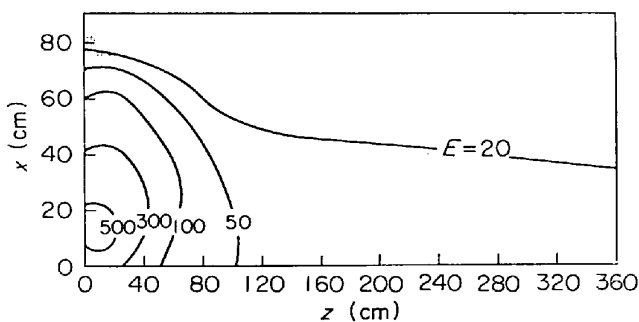


Fig. 12. Computed values of the effective diffusivity in cm^2/sec .

注入ノズルからの距離をパラメータとして示した。図中太い水平線は鋳込速度に相当し、完全に凝固した部分はこの速さで移動することになる。ここで、逆流域を決めるため、固定枠を基準にすると、逆流域は相対的に小さな領域に限定されることとなる。また、基準を鋳込速度に取れば逆流域は大きなものとなるが、当然、後者が基準としては妥当なものである。

Fig. 11 は非金属介在物が捕獲されるまでの軌跡を 2.6 で述べた手法を使つて計算したものを示す。ストレートノズルを使つて、ここに採用した鋳込速度の場合、直径 100μ の介在物はそのほとんどが捕獲されることとなる。介在物の捕獲量を最小にするように、ここに概説した手法を定量的、少なくとも半定量的にノズルや鋳型などの連鋳装置の設計に用いることができよう。

最後に、Fig. 12 と Fig. 13 には大型スラブタイプの連鋳機の場合の結果を示す。そしてその主要操作変数を藤井らの報告²⁴⁾に基づいて Table 2 に示す。Fig. 12 は計算により求めたうず拡散係数の分布を示した。うず拡

Table 2. Numerical values of the parameters used in the calculation of Figs. 12 and 13.

Size of mold	20×170 cm
Diameter of nozzle	6 cm
Mold length*	50 cm
Casting speed	1.2 cm/sec
Casting temperature	1550°C
Carbon content	0.125%
Equilibrium partition coefficient	0.2 (—)
Heat transfer coefficient in the mold**	0.0306 cal/cm ² s°C
Heat transfer coefficient below the mold**	0.0258 cal/cm ² s°C
Thermal conductivity of steel	0.0827 cal/cm s°C

* This was guessed.

** These were estimated from reference(24).

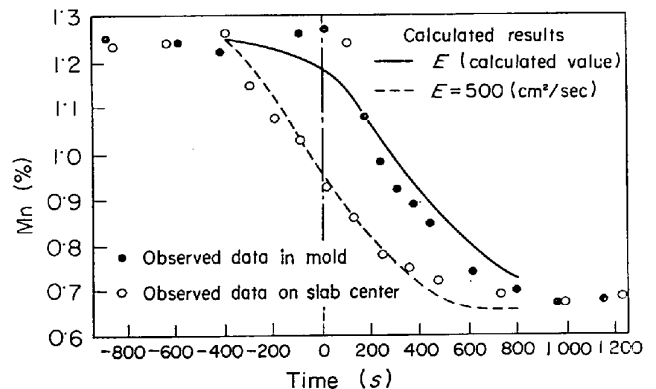


Fig. 13. Comparison of the computed concentration profiles of Mn with the experimental data by Fujii et al²⁴⁾.

散係数はモールドの上部（メニスカスから測つて、モールド幅の 1~2 倍の距離まで）で非常に大きな値を取るが、距離とともに著しく減衰している。

Fig. 13 には、計算から得られたうず拡散係数を使つて求めたトレーサの分散と藤井ら²⁴⁾の報告による実操業データ（操作パラメータは Table 2 に示した。）との比較を示した。この図で、記号●はモールド内で測定されたマンガン濃度を示し、近似的に 2.3 で説明した分散モデルの入力データと見なすことができる。一方、記号○は先の入力に対する応答と見なすことができる。

また、この図には 2 つの計算結果が示されているが、実線の方は Fig. 12 で理論的に求められたうず拡散係数に基づく濃度減衰曲線であり、破線の方はやや任意ではあるが、系内で一番大きな値、 $E=500 \text{ cm}^2/\text{sec}$ を系全体に適用したもので、後者の方が実験から得られたデータをよく説明している。

部分的説明ではあるが、測定値と計算値にみられる明白な相違は、モデルを単純化し過ぎているためで、例え

ば、こわれたデンドライトによる効果などを考慮していないためと考えられる。しかし、このモデルは連続铸造装置内の濃度分散現象を少なくとも近似的には表わしている。

以上、この章では連続铸造プロセスについて、乱流の流れの解析と凝固プロセスの伝熱過程の表現を結びつけた。この解析は、実用スケール装置の濃度分散の表示や最終的には最適注入ノズル設計をするうえで有用であると思われる。なお、この連続铸造の問題についての詳細は文献 21) に示してある。

3.3 電磁誘導攪拌による流動場

水モデル実験やうず拡散係数の計算から、連続铸造では激しい液の混合はモールド上部域に限定されていることがわかった。さらに、TRAVARAS²⁶⁾のこの分野での先駆的な研究により、デンドライトアームを断ち切つて、その成長を抑えるためには高い剪断力の方が望ましいことが知られている。

もともと湯動きの少ない連続铸造のプール下部で、湯の循環を起こしデンドライト成長を抑える目的で、電磁

攪拌を適用することが考えられる。このような電磁力で誘発される循環をただちに測定することは困難であり、理論的に流れの場を推定することが望まれる。そのために 2.5 に展開した方法を用いることができる。

Fig. 14 に示したようなスラブ型の連铸機で、モールドからある距離だけ下つたところで溶鋼を電磁力により攪拌する。この系を表わす主要な操作変数を Table 3 に示す。

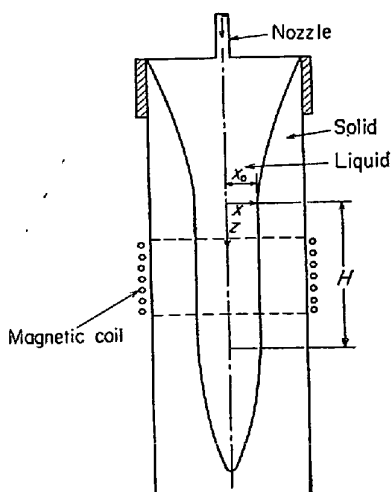


Fig. 14. A sketch of a continuous slab caster with electromagnetic stirring.

Table 3. Numerical values of the parameters used in the calculation of Figs. 15, 16, 17, 18, 19 and 20.

Field size	20 × 100 cm
Magnetic field length	50 cm
Casting speed	1 cm / sec
Frequency	30 cycle
Magnetic field intensity at the melt-solid interface	470 gauss
Specific resistivity	$1.4 \times 10^{-6} \Omega \text{m}$
Magnetic permeability	$1.26 \times 10^{-6} \text{H m}^{-1}$

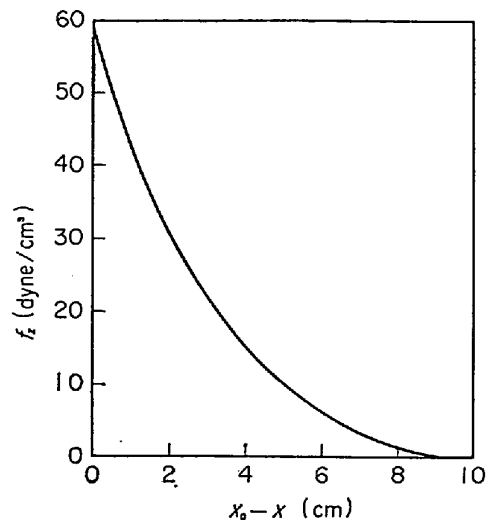


Fig. 15. Computed body force profile induced by the electromagnetic force field.

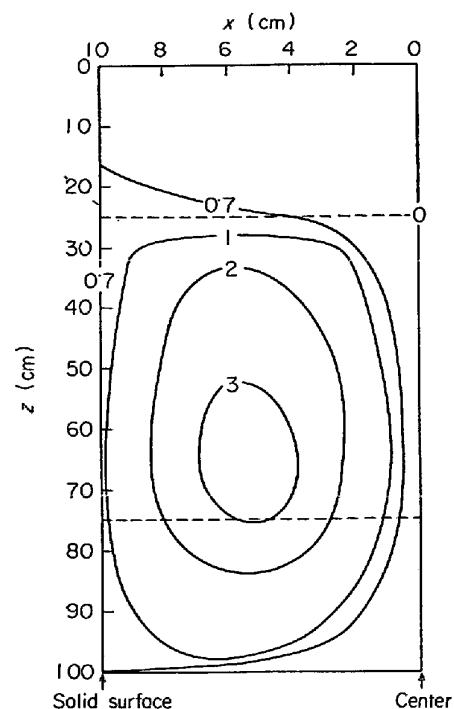


Fig. 16. Computed streamline pattern for the condition when the electromagnetic wave propagate in the upward direction.

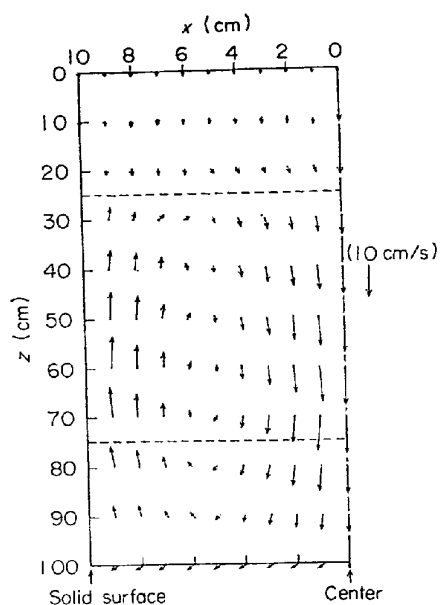


Fig. 17. Computed velocity profiles for the condition when the electromagnetic wave propagate in the upward direction.

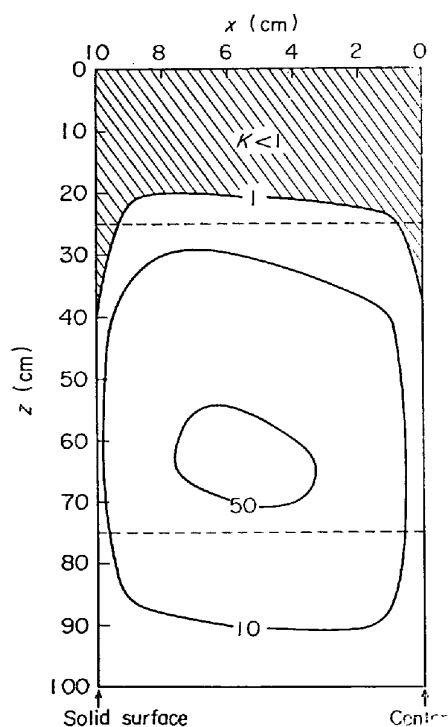


Fig. 18. Computed turbulent energy for the condition when the electromagnetic wave propagate in the upward directions.

第1近似として電磁場の作用する領域では、凝固面は垂直な平面で表わせるとすれば、(1)～(10), (12)～(15), (36)式でこの問題を記述できる。計算結果の一部を次の Fig. 15～20 に示す。

Table 3 に掲げた条件下で、電磁場によって誘導され

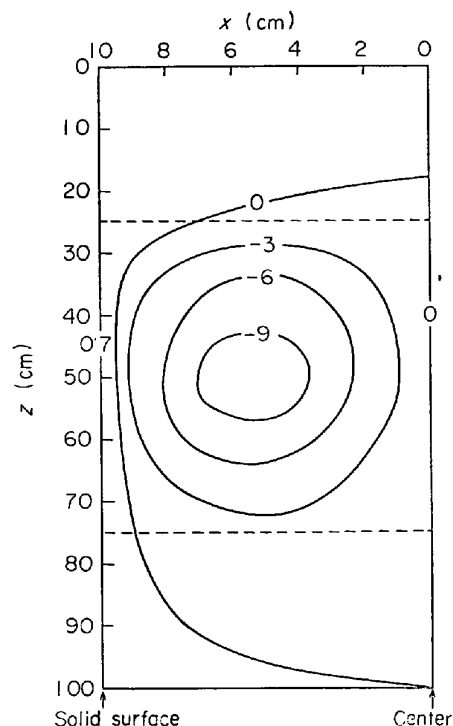


Fig. 19. Computed streamline pattern for the condition when the electromagnetic wave propagate in the downward direction.

る体積力 f_z の計算値を Fig. 15 に示す。この図から、体積力は固液界面からの距離につれていちじるしく減少することがわかる。

Fig. 16～18 には電磁波が上向、すなわち鋳込方向とは逆に伝わる場合の計算結果を示す。Fig. 16 は流線を示し、2本の平行な破線に囲まれた部分は電磁場が作用している領域である。循環流の中心は電磁力の作用する領域の中心よりもやや下流に位置することが注目される。Fig. 17 は Fig. 16 に示される流線に対応する速度場を示す。この図には比較の目的で垂直速度成分 10 cm/sec に相当する矢印を記入した。この場合、上向き最大の速度は凝固面近傍で 13 cm/sec であり、下向きのそれは中心線近傍で 17 cm/sec であつた。Fig. 18 は乱流エネルギーの計算結果を示す。電磁攪拌は非常に高い乱流エネルギーを誘発することがわかる。

Fig. 19, 20 には電磁波の伝わる方向が鋳込方向に一致する場合を示す。この場合、Fig. 19 に示された流線のパターンはほぼ対称的であり、Fig. 16 の場合に比較して循環流は大きい。Fig. 20 に速度場の計算結果を示す。この場合、速度は前に示した Fig. 17 の場合（電磁波の伝わる方向と鋳込方向がことなる場合）よりも大きなものであることがわかる。

この章では、近似的ではあるが、新しい分野の電磁力

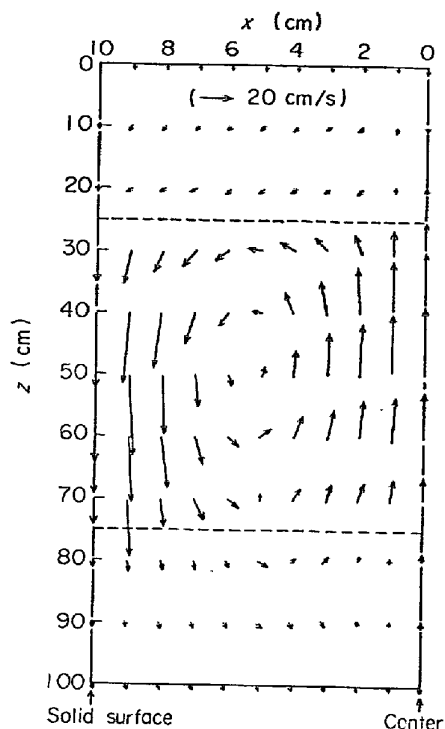


Fig. 20. Computed velocity profiles for the condition when the electromagnetic wave propagate in the downward direction.

によつて誘導される乱流の場を記述した。この分野で将来有用と考えられる研究として、誘導攪拌による流れの場と凝固面の形態との相互作用、さらには、誘導攪拌について最適の周波数を定めることなどがある。明らかに誘導装置は周波数零では働かないし、一方非常に高い周波数では表皮効果のため誘導された力が壁面に限定されすべりなしの境界条件で運動は抑えられてしまう。この極端な2つの場合の中間に最適な周波数が存在することはほぼ確実であり、これは系の幾何学的形状の関数ともなる。

3.4 リミング反応による鋳型内溶鋼のフローパターン

リミング反応を生ずる溶鋼の流れは凝固界面で排出される溶質を洗い流し、かわりにマクロ偏析を生じせしめることはよく知られている²⁷⁾。そして、リミング反応が起こる鋳型内の流れは最終製品の品質を決定するうえで重要な役割をはたしている。この上昇気泡で生ずる鋳型内の流れについて、すぐれた定性的記述はあるが、定量的評価は現在までのところ試みられていない。

Fig. 21 に示したように、長方形のインゴット内で、上昇気泡によつて生ずる溶鋼の運動を考えることにする。乱流粘性係数の表現には“K-W”モデルを用い、側壁の境界の条件として、壁近傍の流速が約 30 cm/sec に成るように、側壁にそつて一定のうず度を仮定した。こ

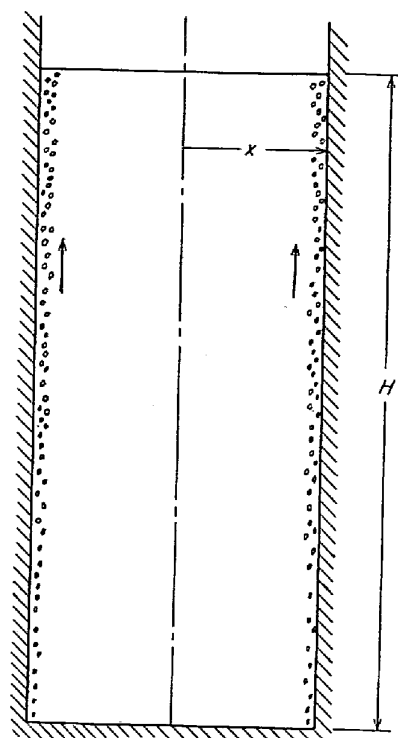


Fig. 21. Sketch of a rimming ingot.

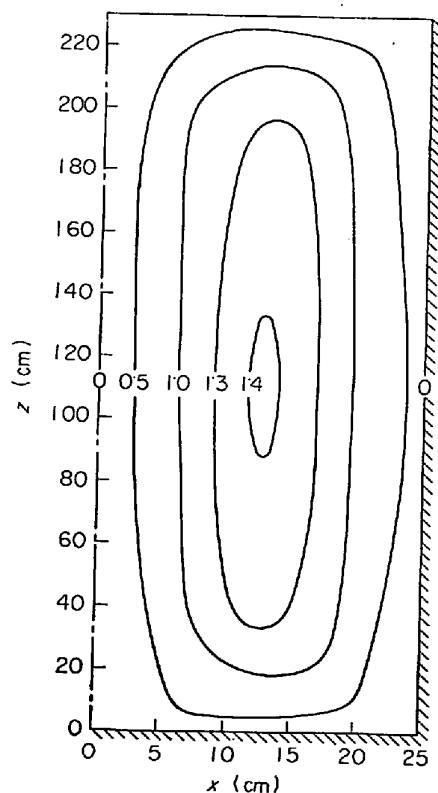


Fig. 22. Computed streamline pattern for a rimming ingot.

の速度は大型のきのこ状気泡の上昇速度に相当するものである。計算結果の一部を Fig. 22~25 に示す。これは

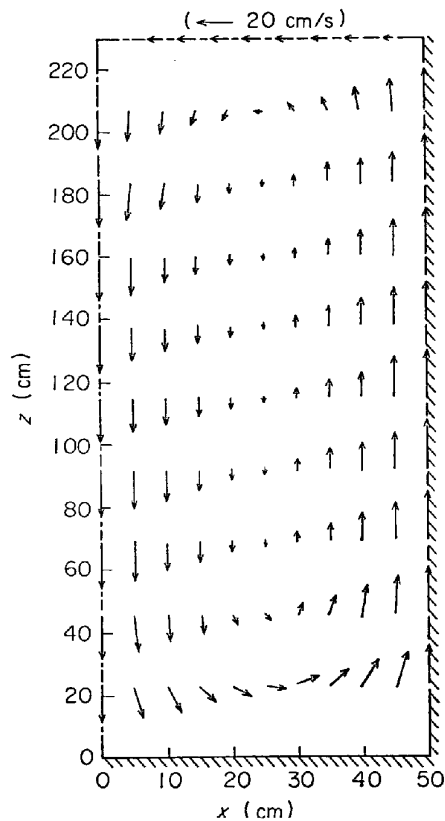


Fig. 23. Computed velocity profiles for a rimming ingot.

壁でのうず度 $6(1/\text{sec})$ 鋳型のサイズ $50 \times 230 \times (80)$ cm として計算したものである。

Fig. 22 は循環パターンを表わす流線の計算結果を、Fig. 23 にはこの流線に相当する速度場を示す。そして、図には比較のため 20 cm/sec の速度ベクトルを与えた。この結果によれば、壁近傍と中心面に非常に速い流れがあり、中央では、液はほとんど静止している。Fig. 24 には、乱流エネルギーを示したが、それは非常に大きな値を示し、特に壁近傍で著しい。このような高い値は鋳型の寸法が大きいことと、速い流体速度によるものと考えられる。

最後に、Fig. 25 にはリミング反応を側壁の上部に限定した場合の流線のパターンを示す。これは弱いリミング反応に相当するもので、このような状況下では循環はインゴット上部に限定され、下部には大きな淀みが現われることがわかる。

リミング反応が起こっている鋳型内の溶鋼についてのこうした計算は極めて未熟なもので、リミング反応が起こっていると考えられる側壁で仮定した境界条件は書き換えられるべきである。この点について、実験データが得られるならば、もつと洗練されたモデルをより現実的な境界条件のもとで展開できるものと思われる。

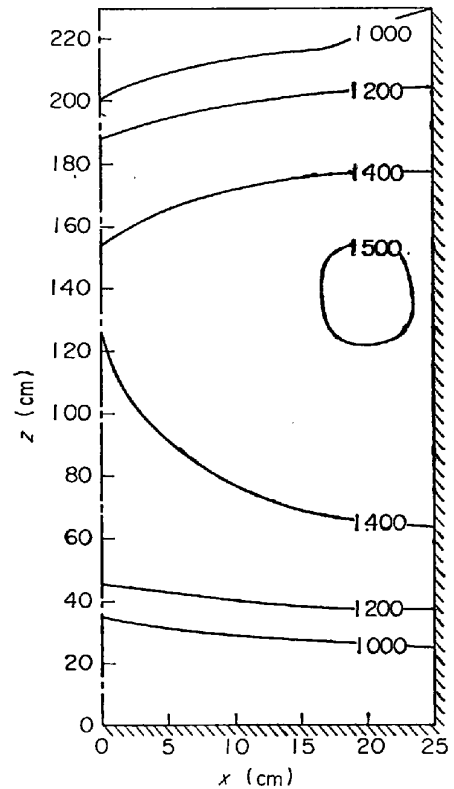


Fig. 24. Computed turbulent energy profiles for a rimming ingot.

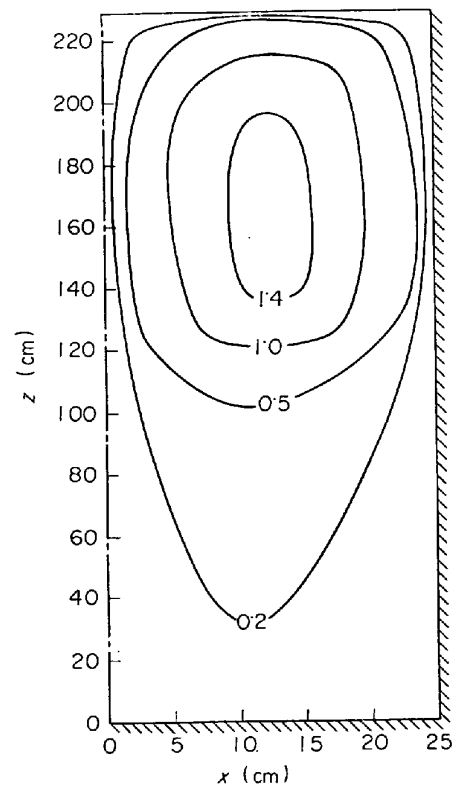


Fig. 25. Computed streamline pattern for a rimming ingot where gas evolution takes place only in the upper half of the vertical wall.

4. 結 言

乱流混合がプロセスの効率に影響を与えるような一連の製鋼プロセスにわたり、乱流理論と最近開発された計算手法を使つて数学的モデルを提案した。

この報告で述べた例題は、アルゴン攪拌による取鍋内の混合、連続鑄造のプール内での液の混合、連続鑄造装置内で電磁力により誘導される流れ、リミング反応による鑄型内溶鋼のフローパターンである。そして、ここに示した計算結果は半定量的、あるいは定量的に実験の結果とよい一致を示した。

計算時間は CDC 6400 電算機で 5~10 min という膨大なものであるが、このモデルは単純な物理モデルと比較して、より深く流れの場の構造に立ち入ったもので、一層明りような内部情報を得ることができるという点から非常に興味深いものと考えられる。介在物の浮上、合体、凝固形態に及ぼす流れの効果、誘導攪拌の効果、広範囲な物質移動操作等を目的とした研究にとつて、流れの場の情報は重要な出発点になるものと考えられる。

本報に示した方法はまだ未熟なものであるが、金属処理操作に有用な多くの情報を与えるものと考えられよう。今後、この分野について、いつそうの実験的、理論的研究がなされることが望まれる。

付記：本研究の一部は A. E. Anderson Foundation の援助によるものである。

使 用 記 号

C : 炭素あるいはマンガン濃度 (%)
 C_1, C_2, C_3, C_d : 定数 (-)
 C_i : 溶質の初期濃度 (%)
 C_p : 比熱 (cal/g°C)
 D : 分子拡散係数 (cm²/sec)
 D_p : 介在物の直径 (cm)
 E : 有効拡散係数 (cm²/sec)
 E : 電場 (V)
 E_i : うず拡散係数 (cm²/sec)
 f_l : 液相分率 (-)
 f_r, f_z : r と Z 方向の体積力 (dyne/cm³)
 f_s : 固相分率 (-)
 f : 力 (Newton)
 g : 重力加速度 (cm/sec²)
 H : 磁場 (AT/m), (Gauss)
 H_m : モールド長さ (cm)
 ΔH : 凝固に伴うエンタルピー変化 (cal/g)
 J : 電流密度 (A/m)
 j : 虚数

K : 乱流エネルギー (cm²/sec²)
 k, k_T : 分子のうずの温度拡散係数 (cm²/sec)
 l : 乱れの大きさ (cm)
 M : 液相線の勾配 (°C/%C)
 m : 平衡分配率 (-)
 $\dot{q}$: 発熱, 吸熱項 (°C/sec)
 R : モールドの半径 (cm)
 r : 半径方向座標 (cm)
 r_n : ノズル半径 (cm)
 r_s : 軸から固層表面までの距離 (cm)
 T : 温度 (°C)
 T_m : 鋼の融点 (°C)
 $\vec{V}$: 速度ベクトル (cm/sec)
 V_p : 介在物の相対速度 (cm/sec)
 V_r : 半径方向の速度 (cm/sec)
 V_z : 軸方向の速度 (cm/sec)
 $V_{z,p}$: 介在物の軸方向実質速度 (cm/sec)
 X_j : j 点の従属変数の値
 W : 乱流運動の確率的特性値 (1/sec²)
 Z : 軸方向座標 (cm)

ギリシャ文字

γ : 伝播定数 (ラジアン/cm)
 ε : 収束基準 (-)
 θ : 経過時間 (sec)
 μ, μ_o, μ_t : 分子, 有効, 乱流の粘性係数 (g/cm·sec)
 μ_0 : 透磁率 (Hm⁻¹)
 ξ : うず度 (1/sec)
 ρ, ρ_p : 溶鋼と介在物の密度 (g/cm³)
 σ : 電気伝導度 (Ω⁻¹cm⁻¹)
 $\sigma_C, \sigma_K, \sigma_T, \sigma_W$: 乱数のシュミット数とプラントル数 (-)
 ψ : 流れ関数 (g/sec)
 ω : 周波数 (ラジアン/sec)

文 献

- 1) H. W. MEYER, F. W. PARTER, G. C. SMITH, and J. SZEKELY: J. Metals, 20, July (1968), p. 35~42
- 2) D. J. PIRIE: Process Engineering of Pyrometallurgy, Proceedings of a Joint Meeting of Institution of Mining and Metallurgy and Institution of Chemical Engineering, London, (1974), p. 8~15
- 3) J. SZEKELY: JISI, 202 (1964), p. 505~8
- 4) J. R. RAWLING and L. S. COSTELLO: J. Metals, 21 (1969) May, p. 49~52
- 5) P. TARASSOFF, N. J. THEMELIS, and D. C. T. PEI: Paper Presented at Chem. Eng. Tripartite

- Conf., Montreal, Sept., (1968) [See also J. SZEKELY, and N. J. THEMELIS, Rate Phenomena in Process Metallurgy, (1971), p. 748 [New York, Wiley Interscience]
- 6) A. D. GOSMAN et al.: Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows, (1969), p. 338 [London and New York: Academic Press]
- 7) R. B. BIRD, W. E. STEWART, and E. N. LIGHT-FOOT: Transport Phenomena, (1960), [New York and London; John Wiley and Sons, Inc.]
- 8) B. E. LAUNDER and D. B. SPALDING: Mathematical Models of Turbulence, (1972), p. 169 London and New York: Academic Press]
- 9) D. B. SPALDING: VDI-Forsch-Heft 38, 549 (1972), p. 5~16
- 10) W. F. HUGHES and F. J. YOUNG: The Electro-magneto-dynamics of Fluids, (1966), [John Wiley and Sons, Inc.]
- 11) J. SZEKELY, S. ASAI, and C. W. CHANG: Proceeding of the International Iron and Steel Congress, Düsseldorf, May, (1974) Vol. III, p. 5.2.2.1
- 12) K. NAKANISHI, et al.: 4th Int. Vacuum Metallurgy, Tokyo, Japan, 4-8 June, (1973), p. 53
- 13) W. M. WOJCIK: Proceeding of the Continuous Casting Symposium of the 102 nd AIME Annual Meeting, Chicago, Ill. (1973), p. 217
- 14) P. H. SALMON and P. E. HAMILL: Proceedings of the Continuous Casting Symposium of the 102 nd AIME Annual Meeting, Chicago, Ill., (1973), p. 257
- 15) 垣生, 吉井, 北岡, 飯田, 今井, 上田: 鉄と鋼, 60 (1974) 7, p. 962
- 16) 川和, 佐藤, 宮原, 小谷野, 根本: 鉄と鋼, 60 (1974) 5, p. 486
- 17) 石黒, 川上, 伊藤, 三好: 鉄と鋼, 60 (1974) 7, p. 885
- 18) J. SZEKELY and R. T. YADOYA: Met. Trans., 3 (1973), p. 1279
- 19) J. SZEKELY and R. T. YADOYA: Met. Trans., 4 (1973), p. 2673
- 20) 森, 長岡, 綾田, 杉谷: 鉄と鋼, 59 (1973) 2, p. A21
- 21) S. ASAI and J. SZEKELY: Ironmaking and Steel-making (in press)
- 22) 牛島: 鉄と鋼, 48 (1962) 6, p. 747
- 23) E. A. MISIKAR: Trans. Met. Soc. AIME, 239 (1967), p. 1747
- 24) 藤井, 松野, 大井: 鉄と鋼, 60 (1974) 7, p. 1041
- 25) J. K. BRIMACOBЕ and F. WEINBERG: JISI, (1973) Jan., p. 24
- 26) A. A. TRAVARAS: Proceeding of the Continuous Casting Symposium of the 102 nd AIME Annual Meeting, Chicago, Ill. (1973), p. 197
- 27) M. C. FLEMINGS: Solidification Processing, (1974), [McGraw-Hill]