

論 文

UDC 536.421.4 : 669.112.2 : 536.4

平衡状態図に基づいた鉄鋼の凝固モデル*

渡 辺 一 雄**

A Mathematical Model of Solidification Based on the Fe-C System Equilibrium Phase Diagram

Kazuo WATANABE

Synopsis:

A mathematical model for the estimation of the solidification processes of steels of various carbon concentrations has been made.

In this model, it is assumed that the latent heat release is proportional to the solid precipitation volume, and the solid precipitations of each δ and γ phases and also the latter at the peritectic point based on the Fe-C equilibrium phase diagram are considered.

The calculated time-temperature curve shows the constant-temperature time at the liquidus, and the higher the initial liquid carbon concentration, the shorter is the constant-temperature time.

From the distributions of the solid fraction for various initial liquid carbon concentrations, it is induced that the initial high carbon concentration is one of the factors to promote the equiaxed grain growth, on the contrary the low carbon concentration to promote the columnar grain growth.

1. 緒 言

凝固過程の熱伝導解析については、最近、連続鋳造に関して多くの報告がなされており、これらは、モールド、スプレー水の冷却能など装置の機能、あるいは溶鋼の流動など連続鋳造に特有な現象を取入れて論ぜられている。

一方、凝固過程の熱伝導方程式の解析については、古くは NEUMANN の解がある。また TIEN は、GOODMAN が凝固など種々の相変化の問題に適用した積分プロファイル法により、冷却側の温度（境界値）が時間の関数である場合について一般解を得た¹⁾。これらの解は、一定の凝固温度を持つ純金属に限られているが、TIEN らは 2 相合金に拡張し、固相率を固液共存層内の距離の 1 次関数とした場合について解を求め²⁾、さらに固相率を温度の関数とした場合についても解を得ているが、最終的には数値解となり複雑なものとなっている。また、宮沢、靱は積分プロファイル法により連続鋳造における凝固問題を解いており³⁾、固相率は温度の 1 次関数としている。

筆者は、鉄鋼における凝固現象を冷却温度曲線より観

察するという観点から、凝固現象をなるべく正確に取り入れた熱伝導方程式を解くことにしたが、比較的複雑な状態図を持つ Fe-C 系合金について解析解を得ることは非常に困難であり、差分方程式によつて解くこととした。

本報告では、Fe-C 系平衡状態図に従つて固相が析出するとの条件のもとに、円柱状鋳片を対象として熱伝導方程式を解き、種々の炭素濃度について凝固時の冷却温度曲線を求め、考察を加えた。

2. 熱伝導方程式

熱伝導方程式は円筒座標によつた。長さ方向の温度変化はないとすれば、熱伝導方程式は

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \dots \dots \dots (1)$$

で表わされる。 $\phi = \int_0^\theta (\kappa/\kappa_0) d\theta$ なる変換温度 ϕ を使用して熱伝導方程式を記述する場合が多いが、ここでは温度変化範囲が狭いので κ を定数として取り扱うため、(1)式は θ に関する方程式となっている。 H は凝固潜熱も含んでいるため当然温度の関数である。

* 昭和 48 年 4 月鉄鋼基礎共同研究会第 4 回凝固部会にて発表
昭和 50 年 2 月 19 日受付 (Received Feb. 19, 1975)

** 大同製鋼(株)研究開発本部中央研究所 (Central research laboratory, R & D div. Daido Steel Co. Ltd. 2-30, Daido-cho Minami-ku Nagoya 457)

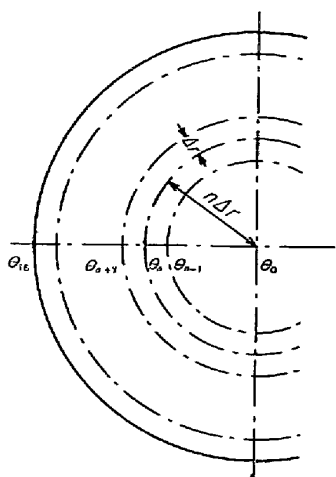


Fig. 1. Schematic representation of ingot.

(1)式を差分方程式にて記述すると、中心軸上以外の任意の点では、

$$\begin{aligned} H_{n,t+\Delta t} &= H_{n,t} + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta r^2} (\theta_{n+1,t} - 2\theta_{n,t} + \theta_{n-1,t}) \\ &+ \frac{\kappa}{\rho} \frac{\Delta t}{2\Delta r} \frac{1}{n\Delta r} (\theta_{n+1,t} - \theta_{n-1,t}) \\ &= H_{n,t} + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \theta_{n+1,t} - 2\theta_{n,t} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \theta_{n-1,t} \right] \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

である。(2)式の添字 n は Fig. 1 に示すように、中心軸からの各点の位置を表わす。添字 $t + \Delta t$ は時間 t より Δt 時間後の時間を表わす。中心軸上については、

$$H_{0,t+\Delta t} = H_{0,t} + \frac{4\kappa}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta r^2} (\theta_1 - \theta_0) \dots\dots\dots (3)$$

である。なお、境界条件は鑄片の表面温度で与えられるものとする。

3. 凝固過程における温度と含熱量との関係について

(2), (3)式により時間 t における含熱量 $H_{n,t}$ と温度 $\theta_{n,t}$ から時間 $t + \Delta t$ における含熱量 $H_{n,t+\Delta t}$ が計算されるが、 $H_{n,t+\Delta t}$ から時間 $t + \Delta t$ における温度 $\theta_{n,t+\Delta t}$ を求めるには、温度と含熱量との関係を確立しておかねばならない。凝固過程における含熱量の変化は主として凝固潜熱の放熱と考えられ、放熱の割合は固相率に比例するとすれば、温度と含熱量との関係は、すなわち温度と固相率の関係となる。この固相析出による潜熱の変化と比熱による含熱量の変化の和が全体の含熱量の変化であるとする。

固相の析出機構については、次に述べる考え方があり、

それによつて温度と含熱量の関係も異なる。

i) 液相中および固相中の溶質濃度が均一である場合、平衡状態図にしたがつて固相および液相が存在し、固相率は lever's rule により計算される。

ii) 液相中の溶質濃度は均一であり、固相中の溶質拡散が全くない場合、PHANNが用いた固相率と析出固相濃度の関係式⁵⁾より、温度と固相率の関係が誘導される。

iii) 固相析出に際して液相中に排出された溶質の液相中における濃度分布の拡散または液相の流動によつて支配される場合。

以上の場合について、温度と固相率の関係を比較検討すると、i) と ii) の場合は、後出の Fig. A1 に示すように固相率が 0.3 程度になるまでは、それほど大きく異なっていない。また、iii) の場合について検討すると液相中の溶質濃度分布は凝固速度によつて異なり、したがつて温度と固相率の関係も凝固速度によつて異なり、一定していない。熱伝導方程式を解くにあつては温度と固相率の関係が決つていなければならないので、正確な解を得るには熱伝導方程式と拡散方程式を連立して解くこととなり、複雑な問題となる。また、簡単に凝固速度を一定と仮定しても、デンドライト間の溶質濃度分布を求めることは、限られた場所にて境界値を指定する場所(固液界面)が移動するという条件にて拡散方程式を解くこととなり、やはり複雑である。

ところが、この溶質濃度分の影響が表われるのは比較的凝固速度が速い場合であり、そして凝固終了点付近であると考えられる。ここでは特殊鋼を対象として考えているが、特殊鋼では炭素をはじめ成分簡囲が広く、成分による凝固の差を検討する必要がある、本報告はこの点に主眼を置いていることと、特殊鋼の連続鑄造の場合、普通鋼に比べて凝固速度が遅いことから、本モデルでは i) によつて計算することとした。なお、ii) については温度と固相率の関係について考察した。

4. 平衡状態図による温度と含熱量の関係式の誘導

Fe-C 系 2 相合金とし、固相および液相が Fe-C 系平衡状態図にしたがつて存在するものとする。計算は次の仮定のもとに行なつた。

i) 固相、液相中とも、それぞれ炭素濃度は均一である。

ii) 平衡分配係数は $\delta + L$ 領域、 $\gamma + L$ 領域においてそれぞれ一定である。

iii) 固相析出に伴う発熱量は δ , γ にかかわらず固相

析出量に比例する。

vi) 凝固潜熱は炭素濃度にかかわらず一定である。

v) 包晶点では、析出する固相による発熱だけを考え、包晶反応による発熱は無視する。

温度と含熱量の関係式は、全部液相である場合、固相、液相が共存する場合、全部固相である場合では異なる。

全部液相の場合には、比熱による項と凝固潜熱の和となり、

$$H = s\theta + H_0 + L \quad \dots\dots\dots (4)$$

で表わされる。 H_0 は凝固点付近における温度と含熱量の関係を表わす直線の延長において、温度が零の場合の含熱量の値である。

全部固相の場合、凝固潜熱はすべて放出されており、

$$H = s\theta + H_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

で表わされる。

次に、固液共存範囲では潜熱は固相析出量に比例して放出されており、

$$H = s\theta + H_0 + Lf_l \quad \dots\dots\dots (6)$$

で表わされる。ここで、 $f_l = 1 - f_s$ である。 f_l は平衡状態図より下記のように表わされる。

一般に、温度が液相線と固相線の間にある場合には、lever's rule により

$$f_l = (C_0 - C_s) / (C_L - C_s) \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。液相線および固相線をそれぞれ $\theta = mC + \theta_0$, $\theta = m/k_0 C + \theta_0$ で表わすとすれば

$$C_L = (\theta - \theta_0) / m \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$C_s = (\theta - \theta_0) / (m/k_0) \quad \dots\dots\dots (9)$$

であり、(7)～(9)式により

$$f_l = \frac{k_0}{1 - k_0} \frac{\theta - [(m/k_0)C_0 + \theta_0]}{\theta_0 - \theta} \quad \dots\dots\dots (10)$$

が得られる。次に、(6)、(10)式より、

$$H = s\theta + H_0 + L \frac{k_0}{1 - k_0} \frac{\theta - [(m/k_0)C_0 + \theta_0]}{\theta_0 - \theta} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。(11)式は、温度が包晶点以外の固液共存範囲にある場合の温度と含熱量の関係式である。

計算に(11)式を用いる場合には、含熱量から温度を求める必要があるため、(11)式は次のように変換される。

$$\theta = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} a &= -s \\ b &= H - H_0 + L \frac{k_0}{1 - k_0} + s\theta_0 \\ c &= -\left[(H - H_0)\theta_0 + L \frac{k_0}{1 - k_0} \left(\frac{m}{k_0} C_0 + \theta_0 \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12')$$

である。(12)式で平方根の前の符号を正としたのは負の

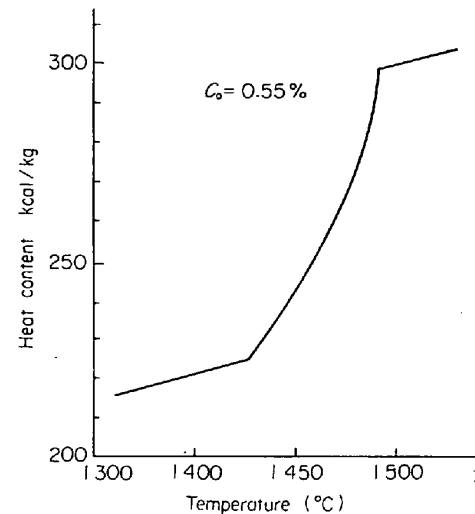


Fig. 2. Relation between temperature and heat content in the assumption of perfect diffusion of carbon in solid and liquid.

場合、数値に現実の意味がないからである。

計算時には、全部液相であるか、固液共存範囲であるか、または全部固相であるかによつて、温度と含熱量の関係式は、(4)式、(12)、(12')式あるいは(5)式のうちのどれを使用するかを判定しなければならない。これらの簡図の境界の温度は(8)、(9)式より

$$\theta_1 = mC_0 + \theta_0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\theta_4 = (m/k_0)C_0 + \theta_0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

であり、 θ_1 、 θ_4 に対応する含熱量は、(4)、(5)、(13)、(14)式より、

$$H_1 = s(mC_0 + \theta_0) + H_0 + L \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$H_4 = s[(m/k_0)C_0 + \theta_0] + H_0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。すなわち、計算手順としては(2)式あるいは(3)式により求められた $H_{n,t+\Delta t}$ が $H_{n,t+\Delta t} > H_1$ ならば(5)式、 $H_1 > H_{n,t+\Delta t} > H_4$ ならば(12)式、 $H_4 > H_{n,t+\Delta t}$ ならば(6)式によつて温度 $\theta_{n,t+\Delta t}$ に変換される。

(4)式、(5)式、(12)式により、 $C_0 = 0.55\%$ の場合について計算した温度と含熱量の関係を Fig. 2 に示した。式中の各数値は後出の Table 1 の値を使用した。

熱伝導計算の過程では固相率を直接求める必要はないが、固相率は lever's rule により

$$\begin{aligned} f_s &= (C_L - C_0) / (C_L - C_s) \\ &= (mC_0 + \theta_0 - \theta) / (1 - k_0)(\theta_0 - \theta) \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。しかし、本計算では H が算出されているため、(6)式より、

$$f_s = 1 - f_l = 1 - (H - s\theta - H_0) / L \quad \dots\dots\dots (18)$$

となり、 H から簡単に計算される。(18)式は包晶点を含む固液共存範囲に対しても成り立つ。

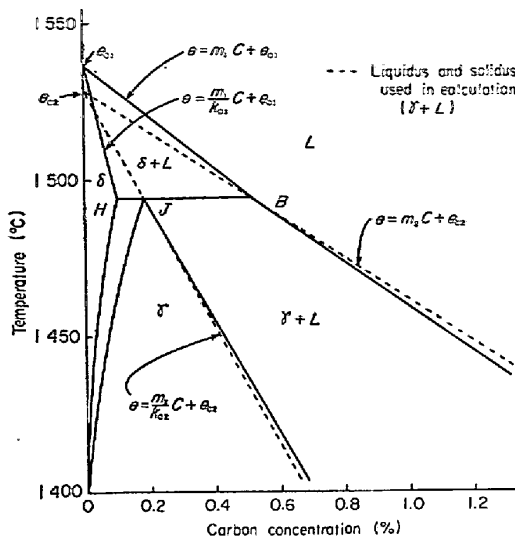


Fig. 3. Equilibrium phase diagram of Fe-C system (by R. TANAKA⁶⁾) and liquidus and solidus used in calculation.

5. Fe-C 系平衡状態図にしたがった温度と含熱量の関係式

Fig. 3 に Fe-C 系平衡状態図⁶⁾を示す。温度と含熱量の関係式は炭素濃度の4つの範囲でそれぞれ異なる。

1) $C_0 < 0.10\%$

温度と含熱量の関係は Fig. 4 a) に示すようになる。

H_1 , H_4 は (15), (16) 式にて $m=m_1$, $k_0=k_{01}$ とした

$$H_1 = s(m_1 C_0 + \theta_{01}) + H_0 + L \quad (19)$$

$$H_4 = s[(m_1/k_{01})C_0 + \theta_{01}] + H_0 \quad (20)$$

である。

温度と含熱量の関係式は H の範囲により下記のようなである。

i) $H_1 < H$ 全部液相であり, (4) 式より

$$\theta = (H - H_0 - L)/s \quad (21)$$

である。

ii) $H_4 < H < H_1$ 固液共存範囲であり, (12) 式で表わされる。ただし, (12) 式中の b , c の各値は (12') 式で $m=m_1$, $k_0=k_{01}$, $\theta_0=\theta_{01}$ とした時の値である。

iii) $H < H_4$ 全部固相であり, (5) 式より

$$\theta = (H - H_0)/s \quad (22)$$

である。

2) $0.10\% < C_0 < 0.18\%$

凝固過程に包晶点を含み, 包晶点で凝固が終了する。温度と含熱量との関係は Fig. 4 b) に示すようになる。

H_2 は温度が包晶点に到達した時間の H であるから, (11) 式にて $m=m_1$, $k_0=k_{01}$, $\theta_0=\theta_{01}$, かつ $\theta=\theta_p$ とすれば, H_2 が求まる。 H_1 , H_2 , H_3 は次のようである。

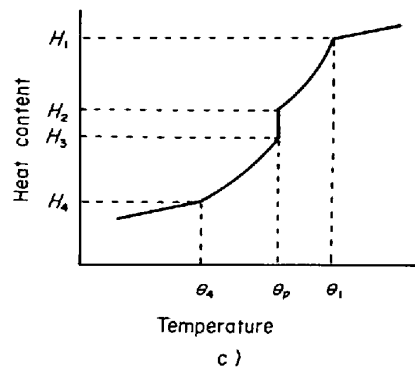
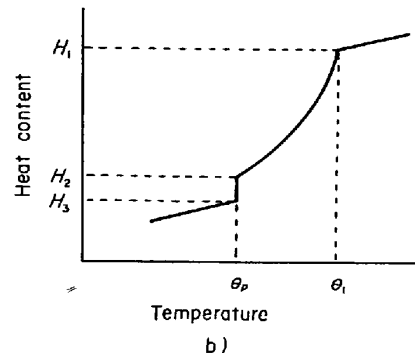
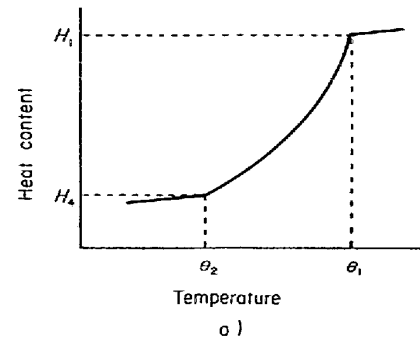


Fig. 4. Relations between temperature and heat content. (a) In the case of $C_0 < 0.10\%$ and $C_0 > 0.51\%$, b) $0.10\% < C_0 < 0.18\%$ and c) $0.18\% < C_0 < 0.51\%$.

$$H_1 = s(m_1 C_0 + \theta_{01}) + H_0 + L \quad (23)$$

$$H_2 = s\theta_p + H_0 + L \frac{k_{01}}{1-k_{01}} \frac{\theta_p - [(m_1/k_{01})C_0 + \theta_{01}]}{\theta_{01} - \theta_p} \quad (24)$$

$$H_3 = s\theta_p + H_0 \quad (25)$$

i) $H_1 < H$ 全部液相であり, (21) 式にて表わされる。

ii) $H_2 < H < H_1$ 固液共存範囲であり, (12) 式で表わされる。ただし, (12) 式中の b , c の各値は, (12') 式で $m=m_1$, $k_0=k_{01}$, $\theta_0=\theta_{01}$ とした時の値である。

iii) $H_3 < H < H_2$ 固液共存範囲で温度が包晶点にある場合であり, H に関係なく,

$$\theta = \theta_p \quad (26)$$

である。なお, この場合も固相率は (18) 式により含熱量

から計算できる。しかし、温度から固相率を求めることはできず、温度(包晶点)および含熱量からは、次の(27)式によって求めることができる。

$$f_s = \frac{H_2 - H}{L} + \frac{m_1 C_0 + \theta_{01} - \theta_p}{(1 - k_{01})(\theta_{01} - \theta_p)} \dots\dots\dots (27)$$

iv) $H < H_3$ 全部固相であり、(22)式で表わされる。

3) $0.18\% < C_0 < 0.51\%$

凝固過程に包晶点を含み、 $\delta + L$ 領域の液相線で凝固し始め、包晶点を経過し、 $\gamma + L$ 領域の固相線で凝固が終了する。温度と含熱量の関係は Fig. 4c) に示すようになる。 H_2 は(24)式と同じであり、 H_3 は(11)式で $m = m_2$, $k_0 = k_{02}$, $\theta_0 = \theta_{02}$, かつ $\theta = \theta_p$ とおいて求まる。

H_1 , H_2 , H_3 , H_4 は次のようである。

$$H_1 = s(m_1 C_0 + \theta_{01}) + H_0 + L \dots\dots\dots (28)$$

$$H_2 = s\theta_p + H_0 + L \frac{k_{01}}{1 - k_{01}} \frac{\theta_p - [(m_1/k_{01})C_0 + \theta_{01}]}{\theta_{01} - \theta_p} \dots\dots\dots (29)$$

$$H_3 = s\theta_p + H_0 + L \frac{k_{02}}{1 - k_{02}} \frac{\theta_p - [(m_2/k_{02})C_0 + \theta_{02}]}{\theta_{02} - \theta_p} \dots\dots\dots (30)$$

$$H_4 = s[(m_2/k_{02})C_0 + \theta_{02}]H_0 \dots\dots\dots (31)$$

i) $H_1 < H$ 全部液相であり、(21)式で表わされる。

ii) $H_2 < H < H_1$ 固液共存範囲であり、(12)式で表わされる。ただし、 b , c の各値は(12')で $m = m_1$, $k_0 = k_{01}$, $\theta_0 = \theta_{01}$ とした時の値である。

iii) $H_3 < H < H_2$ 固液共存範囲で温度が包晶点にある場合であり、(26)式によって表わされる。

iv) $H_4 < H < H_3$ 固液共存範囲であり、(12)式で表わされる。ただし、 b , c の各値は(12')式で $m = m_2$, $k_0 = k_{02}$, $\theta_0 = \theta_{02}$ とした時の値である。

v) $H < H_4$ 全部固相であり、(22)式によつて表わされる。

4) $0.51\% < C_0$

この場合、1)と同様であり、各式において $m_1 = m_2$, $k_{01} = k_{02}$, $\theta_{01} = \theta_{02}$ とおけばよい。

6. 計算結果と考察

6.1 計算に使用した数値

状態図に関する数値は Fig. 3 に示した状態図より決定した。4, 5, で取り扱つたように、計算上、液相線と固相線は直線であり、かつ、 $C=0$ で交わつているという前提がある。この前提にしたがつて液相線と固相線を決定すると、 $\delta + L$ 領域では Fig. 3 の状態図と一致する。

$\gamma + L$ 領域では、液相線と固相線とが $C=0$ で交わり、

Table 1. Data for calculation.

$s = 0.1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$
$\rho = 7.0 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$
$\kappa = 31 \text{ kcal/m} \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{C}$
$L = 64 \text{ kcal/kg}$
$H_0 = -14 \text{ kcal/kg}$
$m_1 = -82.3^\circ\text{C}/\%$
$k_{01} = 0.196$
$\theta_{01} = 1536^\circ\text{C}$
$m_2 = -66.7^\circ\text{C}/\%$
$k_{02} = 0.353$
$\theta_{02} = 1528^\circ\text{C}$
$\theta_0 = 1494^\circ\text{C}$
$d(\text{diameter of specimen}) = 5.3 \times 10^{-2} \text{ m}$
$\Delta r = 0.164 \times 10^{-2} \text{ m}$
$\Delta t = 0.1 \text{ sec}$

かつ、それぞれJ点とB点を通るように決定した。ただし、この場合、状態図の液相線、固相線とは多少差があり、 $C=1.0\%$ で状態図にくらべて、液相線は 2°C ほど高く、固相線は 7°C ほど低くなる。

このようにして決定した $\delta + L$ 領域における液相線と固相線を Fig. 3 において点線にて示した。 m_1 , k_{01} などの数値は、熱伝導関係の数値、差分方程式関係の数値とともに Table 1 に示した。なお、鋳片における半径方向の分割は 16 等分とした。

6.2 考察

5 の 1), 2), 3), 4) の各場合の代表例として $C_0 = 0.05\%$, 0.15% , 0.35% , 0.55% について計算を行なつた。冷却条件は鋳片表面温度が $15^\circ\text{C}/\text{min}$ で降下するという条件である。

計算結果を Fig. 5 a), b), c), d) に示す。鋳片中心点では、温度が液相線に達してから、しばらく液相線より僅か低めの温度にとどまり、温度平衡部を示す。その後温度は降下し、固相線を過ぎるが、包晶点で凝固が終了する Fig. 5 b) 以外は特に固相線付近にて、冷却曲線に特徴的な形は見られない。

液相線より僅か下の温度で、比較的ながく温度平衡部が現われるのは次の理由によるものと考えられる。いま、凝固過程にある微小鋳片を想定し、この鋳片から一定の放熱が続くが、この鋳片内では温度勾配がない場合、すなわち、温度降下が非常にゆるやかな場合について考えると、凝固に伴う含熱量は経過時間に比例して減少する。この場合の凝固温度曲線は、Fig. 2 の含熱量の軸を逆方向に目盛つた時間軸に置きかえたものと同形となり、液相線付近で温度平衡部が現われる傾向にあることがわかる。また、相変化がなく表面から放熱する固体の

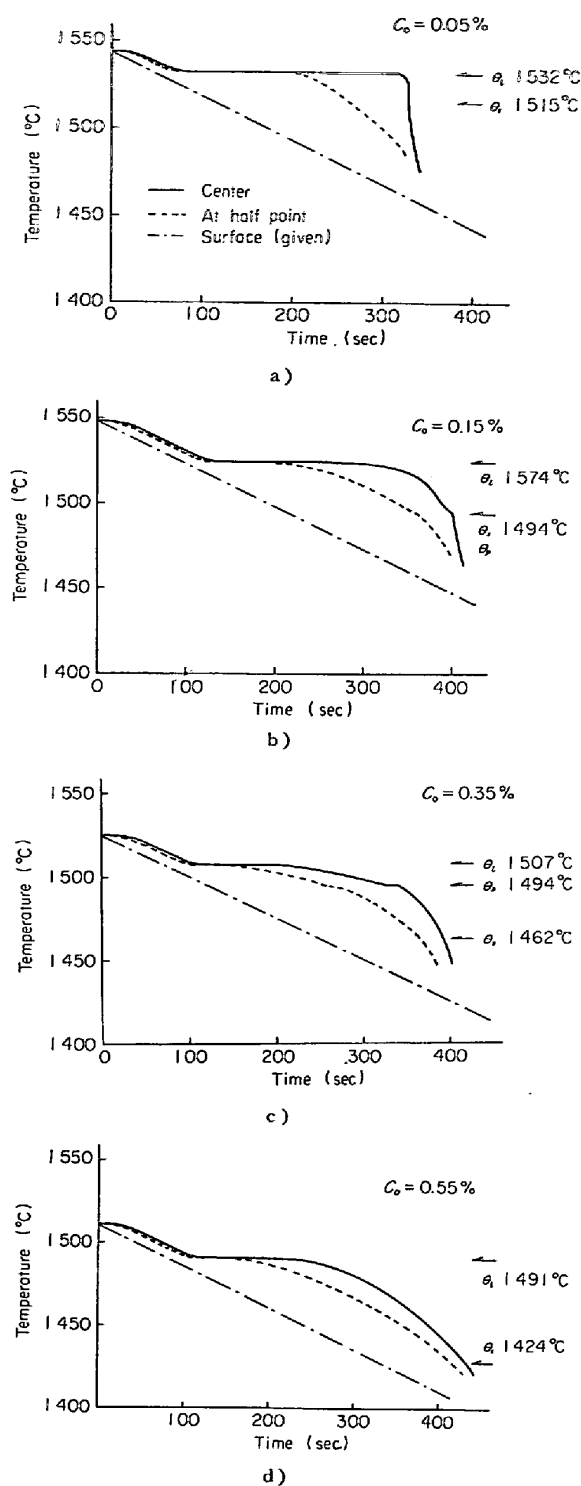


Fig. 5. Calculated time-temperature curves.
(a) $C_0 = 0.05\%$, (b) $C_0 = 0.15\%$, (c) $C_0 = 0.35\%$ and (d) $C_0 = 0.55\%$.

冷却の場合には、中心部は最初はゆつくり温度が降下する。この2つの理由から液相線付近にて温度平衡部が現われるものと考えられる。

Fig. 5によれば温度平衡部の継続時間は C_0 の値が小さいほどながい。実験鑄片により冷却曲線を測定した結

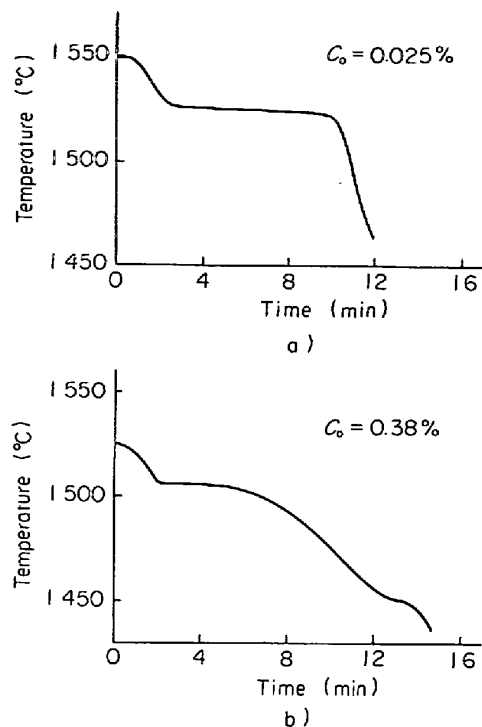


Fig. 6. Measured time-temperature curve.
a) $C_0 = 0.025\%$ and b) $C_0 = 0.38\%$
Specimen: $8\text{ cm} \times 5.3\text{ cm } \phi$.

果を Fig. 6 a), b) に示す。実験においては境界条件を正しく決定することが困難で、計算値と定量的な比較はできないが、 C_0 に関して同様な傾向を示している。

また、ある適当な時間における鑄片内の固相率分布を Fig. 7 a), b), c) に示す。Fig. 7 によれば、 C_0 が小さい場合は固液共存層の幅は狭く、 C_0 が大きくなるにしたがつて固液共存層の幅は広くなる。固液共存層の幅が狭い場合、固相率 1 の場所から固相が堆状に伸びており堆の断面積が固相率を表わすと模型的に考えることができる。しかし、固液共存層の幅が広い場合には、現実には堆状の固相が固液共存層の幅だけ細長く伸びているとは考えられず、固相が伸びているのはある長さに限られ、それ以外の固相率の低い部分は、これとは別に固相が発生していると考えることができる。鑄片側面から伸びた固相が柱状晶を形成し、中心部に発生した固相が等軸晶を形成すると考えると、 C_0 が大きいほど等軸晶が表われやすい状態となっており、 C_0 の大小が等軸晶生成の 1 要因であるとの推論ができる。事実、たとえば、クロム系ステンレス鋼についてみれば、低炭素ステンレス鋼 403 の鑄造断面はほとんど柱状晶であり、高炭素ステンレス鋼 440C の鑄造断面には等軸晶が多くみられる。

7. 結 言

Fe-C 系平衡状態図による固相析出過程を取入れた鉄

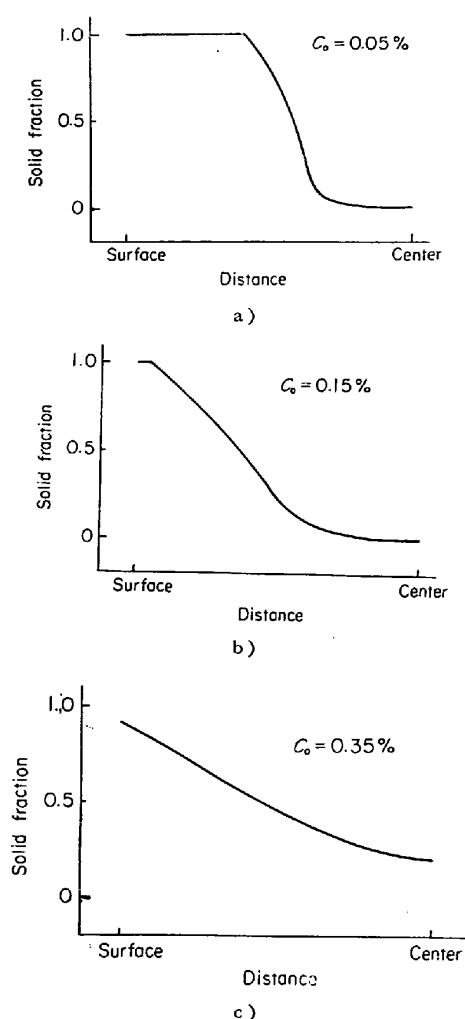


Fig. 7. Calculated distributions of solid fraction.
a) $C_0 = 0.05\%$, b) $C_0 = 0.15\%$ and c) $C_0 = 0.35\%$

鋼の凝固モデルを作成し、種々の C_0 による凝固冷却曲線を計算した。

1) 本モデルは Fe-C 系平衡状態図に基づき、液相および固相内の炭素濃度が均一であることを前提とし、凝固潜熱の放出は固相析出量に比例するとして作成した。

2) 計算による冷却曲線については、鋳片の中心部の温度は液相線より僅か低い温度で平衡部を示し、 C_0 が大きいほど平衡部の継続時間は短い。冷却曲線の測定値においても同様な傾向を示す。

3) C_0 が大きいほど固液共存層の幅が広い。この場合、鋳片中心部に固相率の低い部分が広く発生し、この部分が等軸晶を形成すると考えれば、 C_0 が等軸晶発生の一要因であると推論される。

記号

C : 炭素濃度
 C_0 : 初期液相炭素濃度

C_s : 固相、液相が共存する場合の固相平衡炭素濃度
 C_L : 固相、液相が共存する場合の液相平衡炭素濃度
 f_s : 固相率

f_l : 液相率, $f_l = 1 - f_s$

H : 含熱量

H_1 : 凝固開始点における含熱量

H_2 : 包晶点に到達した温度における含熱量

H_3 : 包晶点から温度が低下し始めるときの含熱量

H_4 : 凝固終了点における含熱量

k_0 : 平衡分配係数

m : 平衡状態図上における液相線の傾き

r : 円筒座標における半径方向の座標

s : 比熱

t : 時間

θ : 温度

θ_0 : 平衡状態図上で液相線または固相線の $C=0$ における温度

θ_p : 包晶点

κ : 熱伝導率

ρ : 密度

m, k_0, θ_0 における添字の 1 は $\delta+L$ 領域, 2 は $\gamma+L$ 領域を表わす。

付 録

液相内で溶質濃度が均一であり、固相内で拡散が全くない場合の温度と液相率または固相率の関係

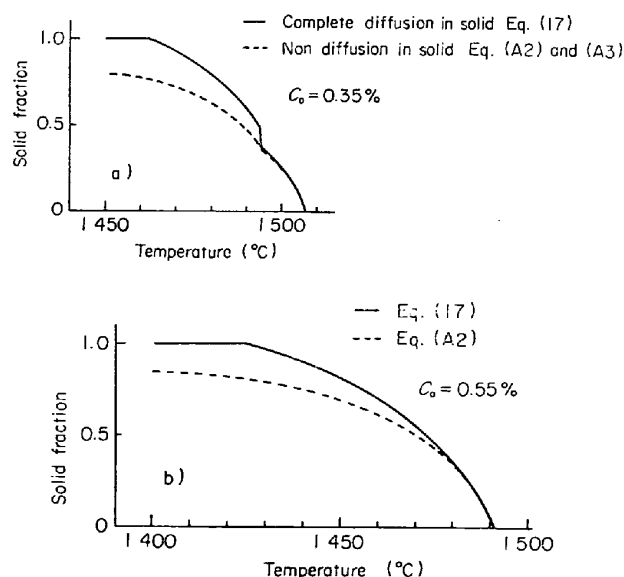


Fig. A1. Comparisons of relations between temperature and solid fraction in both cases of complete diffusion of carbon in solid and non diffusion of carbon in solid (a) $C_0 = 0.35\%$ and b) $C_0 = 0.55\%$).

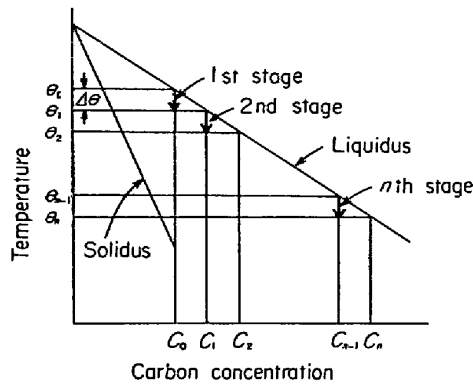


Fig. A2. Procedure for successive calculation of solid fraction in the case of non diffusion of carbon in solid.

1. PFANN の用いた式⁵⁾よりの誘導

$C_s = k_0 C_0 (1 - f_s)^{k_0 - 1}$ および固液界面に平衡関係が成り立つとした $\theta = (m/k_0) C_s + \theta_0$ の関係から

$$f_l = 1 - f_s = \left(\frac{m C_0}{\theta - \theta_0} \right)^{1/(1-k_0)} \quad \text{..... (A1)}$$

が得られる。ただし C_s は析出固相濃度である。(A1) 式を包晶点を含む場合に拡張すると、 $\theta \geq \theta_p$ では (A1) 式と同様、

$$f_l = \left(\frac{m_1 C_0}{\theta - \theta_{01}} \right)^{1/(1-k_{01})} \quad \text{..... (A2)}$$

である。また、 $\theta < \theta_p$ では、 $\theta = \theta_p$ にて残存する濃度 C_p の液相が $\gamma + L$ 領域の液相線と固相線にしたがつて凝固すると考えればよいから

$$f_l = \left(\frac{m_1 C_0}{\theta_p - \theta_{01}} \right)^{1/(1-k_{01})} \left(\frac{m_2 C_p}{\theta - \theta_{02}} \right)^{1/(1-k_{02})} \quad \text{..... (A3)}$$

のように表わされる。(A2), (A3) 式により $C_0 = 0.35\%$, $C_0 = 0.55\%$ の場合について計算し、固相内で溶質濃度が均一の場合とともに Fig. A1 a), b) に示した。

2. 逐次計算法

(A2), (A3) 式は $1/(1-k_0)$ のべき乗の形であるため数値計算は必ずしも簡単でない。それゆえ、最初から数値計算を前提とした計算法を考えた。

Fig. A2 に示すように凝固の過程を不連続な段階に分けて考える。第1段階で、温度 θ_1 、濃度 C_0 単位量の液相が θ_1 に達し、固相量 $V_{s,1}$ 、残存液相量 $V_{L,1}$ となり、さらに第2段階で、 $V_{L,1}$ が θ_1 から θ_2 に達し、 $V_{s,2}$ と $V_{L,2}$ となる。以下、このような不連続な凝固過程を続けるものとする。

$V_{s,1}$ は濃度 C_0 の液相が θ_1 に達した場合の固相率 $f_{s,1}$ であるから lever's rule と $\theta_1 = m C_0 + \theta_0$ より

$$V_{s,1} = f_{s,1} = \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta + m C_0} \quad \text{..... (A4)}$$

$$V_{L,1} = 1 - \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta + m C_0} \quad \text{..... (A5)}$$

となる。ただし、 $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$ である。以下、一般に、 $\Delta\theta = \theta_n - \theta_{n-1}$ である。

次に、温度 θ_1 において濃度 C_1 の液相が θ_2 に達したときの固相率 $f_{s,2}$ は

$$f_{s,2} = \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta + m C_1} = \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{2\Delta\theta + m C_0} \quad \text{..... (A6)}$$

であるから、第2段階で析出する固相量 $V_{s,2}$ と残存液相量 $V_{L,2}$ は

$$V_{s,2} = \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{2\Delta\theta + m C_0} \left(1 - \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta + m C_0} \right) \quad \text{..... (A7)}$$

$$V_{L,2} = \left(1 - \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{2\Delta\theta + m C_0} \right) \left(1 - \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta + m C_0} \right) \quad \text{..... (A8)}$$

となる。

このようにして、第 n 段階における析出固相量 $V_{s,n}$ ならびに残存液相量 $V_{L,n}$ は

$$V_{s,n} = \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{n\Delta\theta + m C_{1, \nu=1}} \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{\nu\Delta\theta + m C_0} \right) \quad \text{..... (A9)}$$

$$V_{L,n} = \prod_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{1}{1-k_0} \frac{\Delta\theta}{\nu\Delta\theta + m C_0} \right) \quad \text{..... (A10)}$$

と求められる。温度 θ_n にて存在する固相量すなわち固相率 $F_{s,n}$ は、明らかに

$$F_{s,n} = \sum_{\nu=1}^n V_{s,\nu} \quad \text{..... (A11)}$$

である。

文 献

- 1) R. H. TIER: Trans. Met. Soc. AIME, 233 (1965), p. 1887
- 2) R. H. TIEN and G. E. GEIGER: Trans. ASME J. Heat Transfer, (1967) 2, p. 230
- 3) R. H. TIEN and G. E. GEIGER: Trans. ASME J. Heat Transfer, (1968) 2, p. 27
- 4) 宮沢, 毅: 鉄と鋼, 60(1972)7, p. 262
- 5) W. G. PFANN: Trans. AIME J. Metals, 194 (1952)6, p. 747
- 6) 田中: 鉄と鋼, 53(1967)14, p. 36