

スラグ・メタル接触操作における操作条件 と不純物除去効果について*

森 山 昭**

Impurity Elimination Performance and Operating Conditions in Various Contacting Methods between Slag and Metal

Akira MORIYAMA

Synopsis:

Eleven kinds of the contacting methods between slag and metal to eliminate the impurity were theoretically analysed from a standpoint of kinetics.

Theoretical solutions with regards to the impurity concentration in metallic phase with each operations were derived and impurity-elimination performances were compared with each others.

For the multi-staged contacting, optimum policies on the duration of the operation, flow rate to the reactor and/or hold-up in the reactor of slags and metals were given by application of Lagrange's multiplier method and of Pontryagin's maximum principle.

(Received Feb. 5, 1969)

1. 緒 言

メタル中の不純物除去を目的とするスラグ・メタル接触操作については、SCHENCK ら¹⁾²⁾および森³⁾の理論的研究がみられる。SCHENCK ら¹⁾²⁾は、回分式、半回分式および流通式向流接触操作の不純物除去効果とスラグ/メタル相対処理量の関係を平衡論の立場から解析した。森³⁾は半回分式および流通式向流接触操作につき、SCHENCK ら¹⁾²⁾が導びいた解式をその極端な場合の一つとして包含する速度論的な理論解を与えている。

半回分式接触操作に関する森³⁾の取扱いでは、流通相における不純物濃度の蓄積が考慮されていないので、流通相の不純物濃度の時間的変化が無視できない場合に不十分な結果を与えるものと考えられる。

本報では、スラグ/メタルの層内滞留量比をあらたなパラメータの一つとして考慮し、SCHENCK ら¹⁾²⁾があげた6種の接触方式に、さらに5種類の接触方式を追加して、これら各接触操作の不純物除去効果と操作条件の関係につき速度論の立場から考察する。

本報であらたに考察する多段操作については、各段へのスラグとメタルの装入量配分や流量配分に関して最適操作条件が存在すると考えられるので、すべての多段操作について、ラグランジェの乗数法あるいはポントリヤギンの最大原理を適用して、各操作の最適条件を導びいた。

2. スラグとメタルの接触操作

2.1 スラグ・メタル接触操作モデル

技術上の困難から、今日実用されているスラグ・メタル接触方式は、ほとんど回分式操作に限られているが、本報では、技術上の可能性を考慮して、Fig. 1に示した11種類の接触方式につき考察する。このうち、SCHENCK ら¹⁾²⁾により取扱われたのは操作(a)~(d)および(j)の方式であり、森³⁾は、操作(c)、(d)および(j)につき考察した。

解析にあたり、操作(a)~(i)での槽内におけるメタルおよびスラグ相中の不純物濃度はそれぞれ均一であるとし、また、操作(j)および(k)で、流れに垂直な断面内での各相内の不純物濃度は均一で、流れに沿った拡散効果が無視できるものとする。

2.2 基礎式、初期および境界条件

メタル相からスラグ相への不純物の移動速度は、他の研究者^{1)~3)}と同様に考えて、(1)式で表わせるものとする。

$$R = k_m a_m (C_m - C_s / K) \dots \dots \dots (1)$$

接触開始前にスラグ相は不純物を含まないものとする^{†1)}と、Fig. 1に示した11種類の接触操作の不純物濃

* 昭和44年2月5日受付

** 名古屋大学工学部 工博

†1 この前提は本質的な問題ではない。

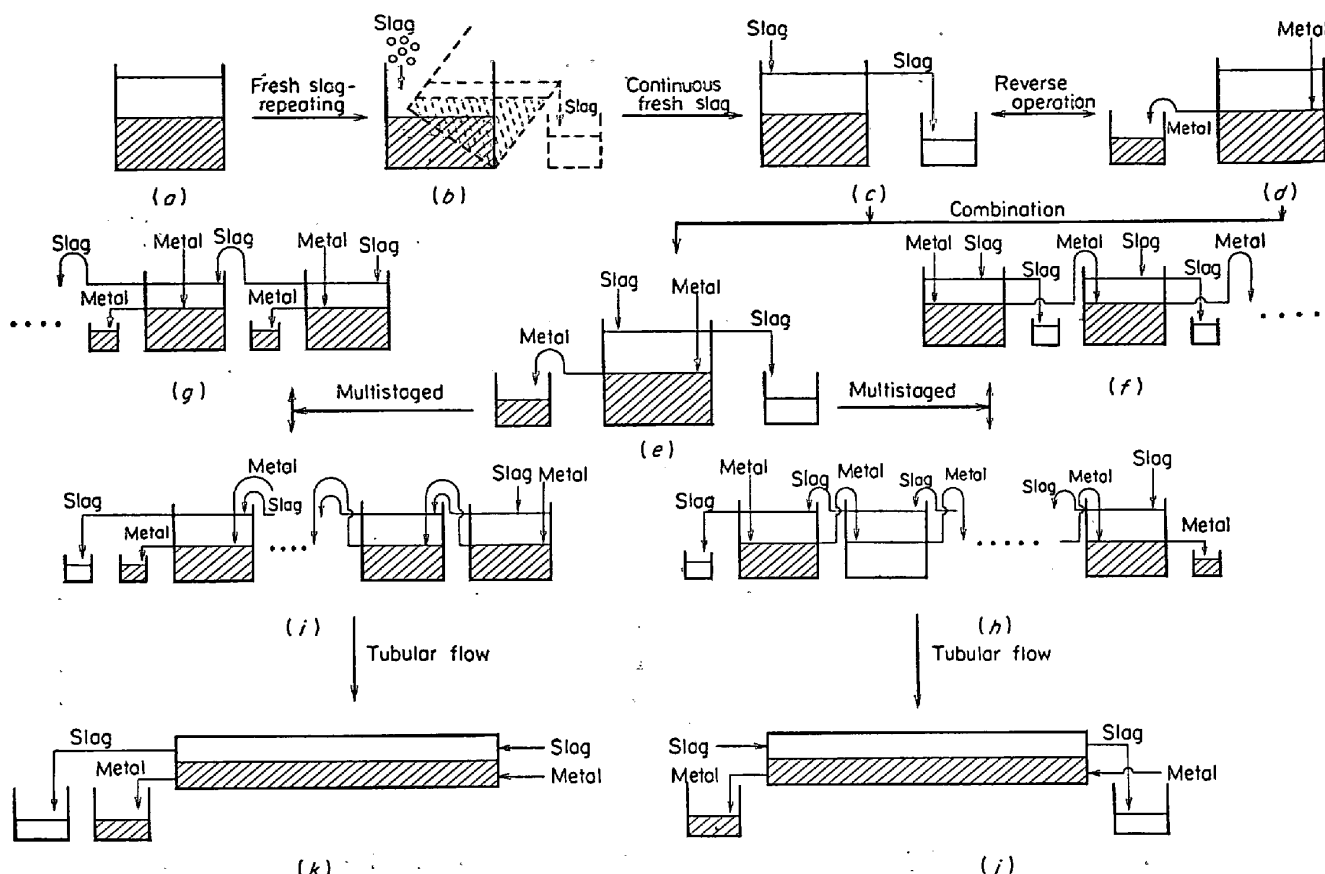


Fig. 1. Various types of contacting methods.

(a) : Batchwise operation, (b) : Multistaged batchwise operation, (c) : Semi-batch operation (A), (d) : Semi-batch operation (B), e : Continuous flow tank operation, (f) : Continuous slag-cross flow operation, (g) : Continuous metal-cross flow operation, (h) : Counter flow tank operation, (i) : Parallel flow tank operation

度に関する基礎式と初期および境界条件は(2)~(13)式となる。

回分式操作(a):

$$\left. \begin{aligned} -dC_m/d\theta &= R \\ V_s dC_s/d\theta &= V_m R \\ \theta = 0 \text{ で } C_m &= C_{m,0}, C_s = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

多重回分式操作(b):

$$\left. \begin{aligned} -dC_{m,i}/d\theta_i &= R_{i,i} \\ V_{s,i} dC_{s,i}/d\theta_i &= V_{m,i} R_{i,i} \\ \theta_1 = 0 \text{ で } C_{m,i} &= C_{m,0}, \theta_i = 0 \text{ で } C_{s,i} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \dots (3) \\ (i=1 \sim m) \end{matrix}$$

半回分式スラグ流通操作(c):

$$\left. \begin{aligned} -dC_m/d\theta &= R \\ V_s dC_s/d\theta &= V_m R - F_s C_s \\ \theta = 0 \text{ で } C_m &= C_{m,0}, C_s = 0 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

半回分式メタル流通操作(d):

$$\left. \begin{aligned} -dC_m/d\theta &= R - (F_m/V_m)(C_{m,0} - C_m) \\ V_s dC_s/d\theta &= V_m R \\ \theta = 0 \text{ で } C_m &= C_{m,0}, C_s = 0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

連続式槽型接触操作(e):

$$\left. \begin{aligned} V_m R - F_m (C_{m,0} - C_m) &= 0 \\ V_m R - F_s C_s &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

連続式多段スラグ直交流操作(f):

$$\left. \begin{aligned} V_{m,i} R_{i,i} - F_m (C_{m,i-1} - C_{m,i}) &= 0 \\ V_{m,i} R_{i,i} - F_s C_{s,i} &= 0 \\ i = 0 \text{ で } C_{m,i} &= C_{m,0} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \dots (7) \\ (i=1 \sim n) \end{matrix}$$

連続式多段メタル直交流操作(g):

$$\left. \begin{aligned} V_{m,i} R_{i,i} - F_m (C_{m,0} - C_{m,i}) &= 0 \\ V_{m,i} R_{i,i} - F_s (C_{s,i} - C_{s,i-1}) &= 0 \\ i = 0 \text{ で } C_{s,i} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \dots (8) \\ (i=1 \sim n) \end{matrix}$$

連続式多段向流操作(h):

$$\left. \begin{aligned} V_{m,i} R_{i,i-1} - F_m (C_{m,i-1} - C_{m,i}) &= 0 \\ V_{m,i} R_{i,i-1} - F_s (C_{s,i-1} - C_{s,i}) &= 0 \\ i = 0 \text{ で } C_{m,i} &= C_{m,0}, i = n \text{ で } C_{s,i} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \dots (9) \\ (i=1 \sim n) \end{matrix}$$

連続式多段並流操作(i):

$$\left. \begin{aligned} V_{m,i} R_{i,i} - F_m (C_{m,i-1} - C_{m,i}) &= 0 \\ V_{m,i} R_{i,i} - F_s (C_{s,i} - C_{s,i-1}) &= 0 \\ i = 0 \text{ で } C_{m,i} &= C_{m,0}, C_{s,i} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \dots (10) \\ (i=1 \sim n) \end{matrix}$$

連続式管型向流操作(j):

$$\left. \begin{aligned} -F_m dC_m/dZ &= (V_m/L) R \\ -F_s dC_s/dZ &= (V_m/L) R \\ Z = 0 \text{ で } C_m &= C_{m,0}, Z = L \text{ で } C_s = 0 \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

Table 1. Four kinds of dimensionless parameters.

Operation	Time, τ	Retention volume ratio, α	Feed ratio β	Mass transfer factor, N
(a), (b) (c) (d)	θ/θ_0 $F_s\theta/V_s$ $F_m\theta/V_m$	KV_s/V_m		$k_m a_m \theta_0$ $V_s k_m a_m / F_s$
(e)~(k)			KF_s/F_m	$V_m k_m a_m / F_m$

連考式管型並流操作 (k):

$$\left. \begin{aligned} -F_m dC_m/dZ &= (V_m/L)R \\ F_s dC_s/dZ &= (V_m/L)R \\ Z=0 \text{ で } C_m &= C_{m,0}, C_s=0 \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここで, } R_{i,i} &= k_m a_m (C_{m,i} - C_{s,i}/K) \\ R_{i,i-1} &= k_m a_m (C_{m,i} - C_{s,i-1}/K) \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

いま, メタルおよびスラグ相内の不純物濃度をそれぞれ

$$x = C_m/C_{m,0}, y = C_s/KC_{m,0} \dots (14)$$

のように無次元表示し, 各種操作条件と変数とを Table 1 に示す 4 種類のパラメータにまとめる.

回分式および多重回分式操作, (a) および (b) では α および $N\tau$ の 2 因子により, 不純物除去効果が定まる. このため, 不純物濃度は, $N \rightarrow \infty$ でも, $\tau \rightarrow \infty$ でも, 同一の平衡状態に到達する. 半回分式操作 (c) および (d) では α , N および τ が不純物濃度を支配する. すなわち操作 (c) および (d) では, $N \rightarrow \infty$ の状態と $\tau \rightarrow \infty$ の状態とは一致しない.

定常操作 (e)~(k) では, 流出メタル中の不純物濃度は操作時間に関係なく一定であるため, 物質移動速度に関するパラメータ N とスラグ/メタル処理量比に相当する β のみにより不純物除去効果が定まる.

2.3 各操作に関する基礎式 (2)~(13) の解

Table 1 と (14) 式とで定義した無次元変数およびパラメータを使用して, (2)~(13) 式に基づき, スラグとの接触処理終了後のメタル中の不純物濃度に関する解を求めたのが (15)~(25) 式である. ここでは, 多重および多段操作については, 簡単のため, $V_{m,i} = V_m/n$, $V_{s,i} = V_s/n$, $F_{m,i} = F_m/n$ および $F_{s,i} = F_s/n$ の場合の解を示したが, 後述するように, これらの条件は, いずれもメタル中の不純物濃度を最小にするような多段操作の最適条件に相当する.

操作 (a):

$$x = [1 + \alpha \exp \{-(1 + 1/\alpha)N\tau\}] / (1 + \alpha) \dots (15)$$

操作 (b):

$$x_n = [1 + (\alpha/n) \exp \{-(1 + n/\alpha)N\tau/n\}]^n / (1 + \alpha/n)^n \dots (16)$$

操作 (c):

$$x = \{(P_1 + N) \exp(P_2\tau) - (P_2 + N) \exp(P_1\tau)\} / (P_1 - P_2) \dots (17)$$

ここで, P_1 および P_2 は $P^2 + \{1 + N(1 + 1/\alpha)\}P + N = 0$ の根である.

操作 (d):

$$\bar{x} = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta x d\theta' = 1 - (\alpha/\tau) [1 + q_2 \exp(q_1\tau) - q_1 \exp(q_2\tau)] / (q_1 - q_2) \dots (18)$$

ここで, q_1 および q_2 は $q^2 + (1 + N + N/\alpha)q + N/\alpha = 0$ の根である.

操作 (e):

$$x = (N + \beta) / \{\beta + N(1 + \beta)\} \dots (19)$$

操作 (f):

$$x_n = [(N + \beta) / \{\beta + N(1 + \beta/n)\}]^n \dots (20)$$

操作 (g):

$$\bar{x}_n = \sum_{h=1}^n x_h/n = 1 - (\beta/n) [1 - \{\beta(1 + N) / [\beta + N(1 + \beta)]\}^n] \dots (21)$$

操作 (h):

$$x_n = 1 - \beta(1 - r_1^n) / (\beta - r_1^n) \dots (22)$$

ここで, $r_1 = (\beta + N/n) / \beta(1 + N/n)$

操作 (i):

$$x_n = (1 + \beta u_1^n) / (1 + \beta) \dots (23)$$

ここで, $u_1 = \beta / \{\beta + N(1 + \beta/n)\}$

操作 (j):

$$x = 1 - \beta [1 - \exp\{-N(1 - 1/\beta)\}] / [\beta - \exp\{-N(1 - 1/\beta)\}] \dots (24)$$

操作 (k):

$$x = [1 + \beta \exp\{-N(1 + 1/\beta)\}] / (1 + \beta) \dots (25)$$

操作形式からも推察されるように, これらの解式は, たがいに関係をもっている. すなわち, (15) および (25) 式は, $\alpha_{(a)} = \beta_{(k)}$ および $N\tau_{(a)} = N_{(k)}$, したがって, $V_m/F_m = V_s/F_s = \theta_h$ の条件下で一致する. (16) 式で, $n=1$ の場合, また, (17) 式で $N_{(c)} = \infty$, $\tau_{(c)} = 0$ および $N\tau_{(c)} = N\tau_{(a)}$ の場合, および (18) 式で $\bar{x}\tau$ を τ で微分したのち, $N_{(d)} = \infty$, $\tau_{(d)} = 0$ および $N\tau_{(d)} = N\tau_{(a)}$ とおくと, いずれの場合も (15) 式となる.

また、(20)～(23)式で $n=1$ の場合は、(19)式が導かれ、(22) および (23) 式で $n=\infty$ の場合は、それぞれ (24) および (25) 式が得られる。これらの相互関係は操作形式の物理的な特質に由来し、それと一致している。

2.4 各操作の平衡論的關係式

スラグ・メタル接触操作で、相間の物質移動速度がきわめて大きい場合は、スラグおよびメタル相内の不純物濃度は平衡関係により支配される。

(15)～(25)式で $N=\infty$ とおいて得られる平衡論的な関係式が (15)'～(25)' 式である。

- 操作 (a): $x=1/(1+\alpha)$ (15)'
 “ (b): $x_n=1/(1+\alpha/N)^n$ (16)'
 “ (c): $x=\exp\{-\alpha\tau/(1+\alpha)\}/(1+\alpha)$ (17)'
 “ (d): $\bar{x}=1-(\alpha/\tau)[1-\exp\{-\tau/(1+\alpha)\}]$ (18)'
 “ (e): $x=1/(1+\beta)$ (19)'
 “ (f): $x_n=1/(1+\beta/n)^n$ (20)'
 “ (g): $\bar{x}_n=1-(\beta/n)[1-\{\beta/(1+\beta)\}^n]$ (21)'
 “ (h): $x_n=(1-\beta)/(1-\beta^{n+1})$ (22)'
 “ (i): $x_n=1/(1+\beta)$ (23)'

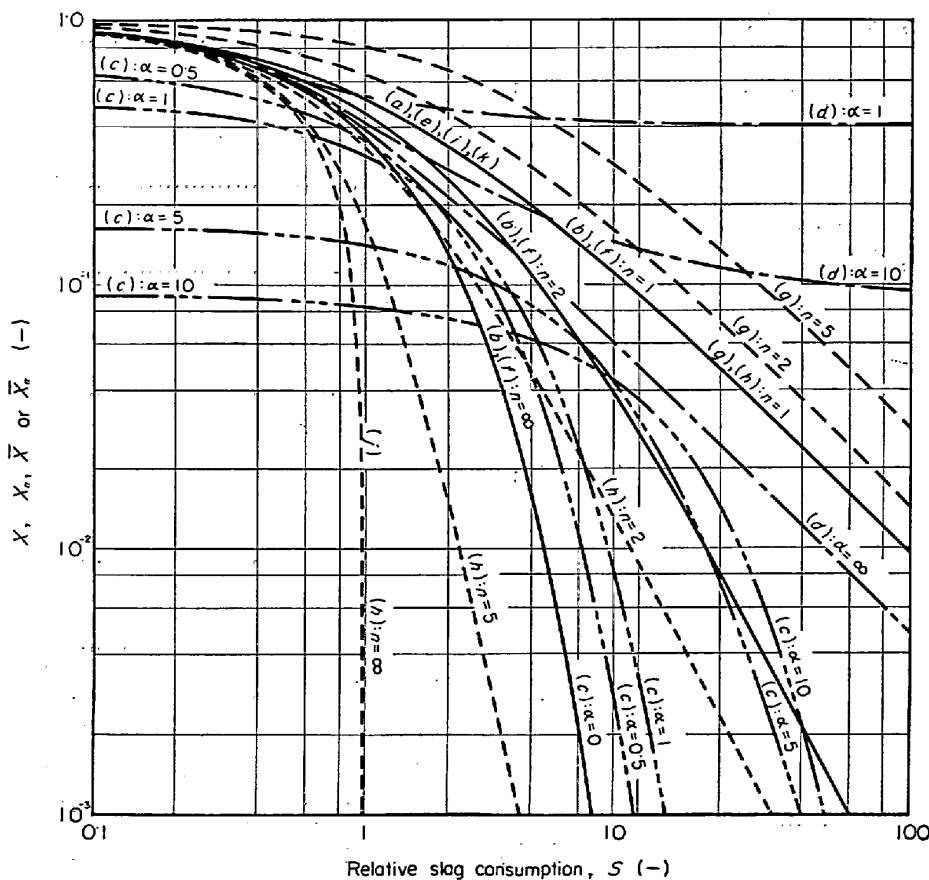


Fig. 2. Dimensionless concentration of impurity in metals and relative slag consumption, S when mass transfer rate is extremely large; i.e., $N=\infty$.

Table 2. Total volumetric ratio of slag and metal, S .

Operation	(a), (b)	(c)	(d)	(e)~(k)
S	α	$\alpha\tau$	α/τ	β

$$“ (j): x=1-\beta \dots\dots\dots (24)'$$

$$“ (k): x=1/(1+\beta) \dots\dots\dots (25)'$$

(15)', (16)' および (24)' 式は SCHENCK ら¹²⁾によりすでに示されているものであり、また、(17)' 式で、 $\alpha=0$ で $\alpha\tau\neq 0$ の場合および、(18)' 式で $\alpha=\infty$ で $\tau/\alpha\neq 0$ の場合が SCHENCK ら¹²⁾の解と一致する。連続式管型向流操作 (j) に関する (24)' 式では $\beta>1$ で $x<0$ となる。これは、 $N=\infty$ の条件では、スラグ流量が、 $F_s=KF_m$ すなわち、 $\beta=1$ のときに、ちょうど流出メタル中の不純物濃度が 0 となることを意味しており、数学的には $\beta>1$ は無意味であり、実際的にはスラグ流量を $F_s>KF_m$ にまで増す必要がない。

いま、スラグ/メタル相対処理量比に相当する S を Table 2 で定義し、(15)'～(25)' に基づくメタル中の不

純物濃度を S に関してえがいたのが Fig. 2 である。

実操作としては、 S が小さい値の範囲で不純物濃度を低くするのが望ましいが、この意味ですぐれているのは操作 (j) である。操作 (c) は、 α を大きくすることにより、 S が小さい値でよい結果を与える。操作 (a)、(e)、(i) および (k) で、メタル中の不純物濃度を小さくするには、 S をかなり大きくする必要がある。操作 (b)、(f) および (h) では、段数を増すとともに不純物除去効果が向上するが一方、操作 (g) では、段数の増加とともに不純物除去効果は逆に低下する。操作 (d) では、操作の初期に不純物除去効果があるが、操作の続行とともにメタル中の不純物濃度が回復して増加することがある。

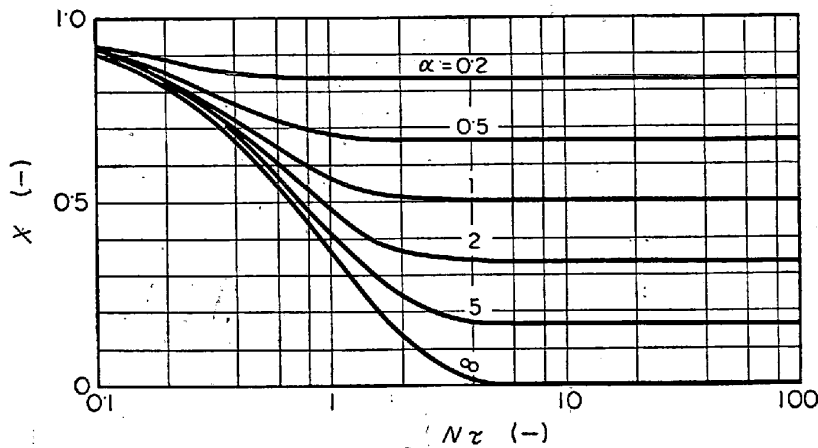
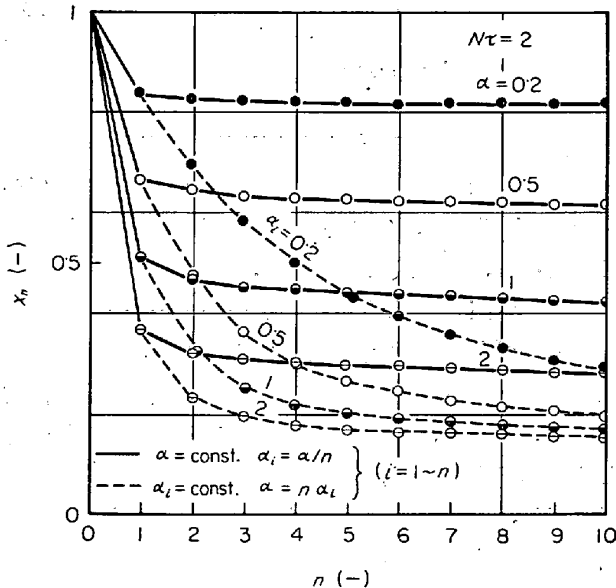
Fig. 3. $x-N\tau$ relations in operation (a).

Fig. 4. Effect of the stage number on impurity concentration in operation (b).

3. 回分式および多重回分式操作(a)および(b)

3.1 回分式操作(a)における操作時間

(15)式に基づけば、 x は α および $N\tau$ の増加とともに減少する。 α および $N\tau \rightarrow \infty$ の極限で(15)式から(26)式が導びかれる。

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x = \exp(-N\tau), \quad \lim_{N\tau \rightarrow \infty} x = 1/(1+\alpha) \quad (26)$$

Fig. 3に α をパラメータとして、(15)式に基づく x を $N\tau$ にたいしてえがいた。 $N\tau > 2$ ていどの範囲で、 x は(26)式の極限值にかなり近づくことがわかる。図の結果は、 α が x の減少に大きく影響することを示しているが回分式操作で α を大きくすることには限界があると思われる。

3.2 多重回分式操作(b)のくり返し回数

(16)式は、 $\alpha = \text{一定}$ で $\alpha_i = \alpha/n$ および $\tau = \text{一定}$ で $\tau_i = \tau/n$, ($i=1 \sim n$)の条件での n 重回分式操作によるメタル中の不純物濃度を示している。(16)式に基づき操作のくり返し回数の効果の一例を示したのが Fig. 4 の実線で示した結果である。

この操作では、 $n = \infty$ の極限で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \exp\{-\alpha[1 - \exp(-N\tau/\alpha)]\} \quad (27)$$

が成り立つ。Fig. 4をFig. 3と比較すると、くり返し回数 n をふやすことにより x_n の値は、回分式操作で $N\tau$ を増加して得られる x の値より低くなるが、 $N\tau=2$ の条件では n をましても x_n の値に顕著な効果をもたらさないことがわかる。スラグの消費量に制限をもうける必要がない場合には、操作の延時間を一定に保った条件下でも x の大きな低下が期待できる。すなわち、 $\alpha_i = \alpha_0 = \text{一定}$, および $\tau = \text{一定}$ で τ_i/n の条件のもとで(3)式の解は(28)式となる。

$$x_n = [1 + \alpha_0 \exp\{-(1 + 1/\alpha_0)N\tau/n\}]^n / (1 + \alpha_0)^n \quad (28)$$

(28)式に基づく x_n とくり返し回数 n の関係を示したのが Fig. 4 の点線で示した結果である。 $n = \infty$ の極限では、(3)式で $y_i = 0$ とにおいて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \exp(-N\tau) \quad (29)$$

となり、 α_0 の値によらず、 $N\tau$ のみできまる一定値に漸近する。Fig. 4から α_0 が大きいほど、少ないくり返し回数で(29)式の極限值により近づくことがわかる。

3.3 操作(b)の最適操作時間配分および最適スラグ配分量

操作(b)では、一般に α_i および τ_i , ($i=1 \sim n$)が任意の値をとる場合に、(3)式の解として(30)式が導びかれる。

$$x_n = \prod_{h=1}^n [1 + \alpha_h \exp\{-(1 + 1/\alpha_h)N\tau_h\}] / (1 + \alpha_h) \quad (30)$$

この場合、スラグの使用量と操作時間を無制限に大きくすれば、メタル中の不純物濃度がいくらでも低くなることは当然であるが、いま、これら二つの量にいずれも別の一定の制限があり、その制限のもとで x_n を最小にするようなスラグと操作時間の最適配分法を決定する。

すなわち、

$$\sum_{h=1}^n \tau_h = \tau = \text{一定}, \quad \sum_{h=1}^n \alpha_h = \alpha = \text{一定} \quad (31)$$

の条件下で, (30) 式の x_n を最小にする $\tau_{i,opt}$ および $\alpha_{i,opt}$ を決定する.

目的関数は

$$P = x_n + \lambda_1 \left(\sum_{h=1}^n \tau_h - \tau \right) + \lambda_2 \left(\sum_{h=1}^n \alpha_h - \alpha \right) \quad (32)$$

λ_1, λ_2 はラグランジュの未定係数

となり, $\partial P_i / \partial \tau_i = 0$ および $\partial P_i / \partial \alpha_i = 0$ の条件から (33) および (34) 式がそれぞれ得られる.

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha_i) \exp \{ - (1 + 1/\alpha_i) N \tau_i \} / \\ & [1 + \alpha_i \exp \{ - (1 + 1/\alpha_i) N \tau_i \}] \\ & = (\lambda_1 / N) \prod_{h=1}^n [(1 + \alpha_h) / \{1 + \alpha_h \exp \\ & [- (1 + 1/\alpha_h) N \tau_h \}]] \quad (i=1 \sim n) \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [1 - \{1 + (1 + 1/\alpha_h) N \tau_i\} \exp \{ - (1 + 1/\alpha_i) N \tau_i \}] / \\ & (1 + \alpha_i) [1 + \alpha_i \exp \{ - (1 + 1/\alpha_i) N \tau_i \}] \\ & = \lambda_2 \prod_{h=1}^n [(1 + \alpha_h) / \{1 + \alpha_h \exp [- (1 + 1/\alpha_h) N \tau_h \}]] \\ & \quad (i=1 \sim n) \quad (34) \end{aligned}$$

(33) 式の右辺は回数 i によらないので, これを C であらわし, (33) 式左辺と組み合わせて, (31) 式の条件を考慮して演算することにより (35) 式が導びかれる.

$$\begin{aligned} C &= (1 + \alpha_i) \exp \{ - (1 + 1/\alpha_i) N \tau / n \} / \\ & [1 + \alpha_i \exp \{ - (1 + 1/\alpha_i) N \tau / n \}] \quad (i=1 \sim n) \quad (35) \end{aligned}$$

(33) 式と (35) 式を比較すれば

$$\tau_{i,opt} = \tau / n \quad (i=1 \sim n) \quad (36)$$

となる. 同様に, (34) 式右辺も i によらないので, (34) 式右辺に (36) 式を代入することにより,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n \quad (37)$$

となり, (31) 式の条件から, 一般に,

$$\alpha_{i,opt} = \alpha / n \quad (38)$$

が導びかれる.

すなわち, 多重回分式操作では, τ と α とに一定の制限がある場合に, 各回の操作で等分した α と τ を割付けするのが最適政策となる.

4. 半回分式操作(c)および(d)

4.1 半回分式スラグ流通操作(C)における α の効果

(17) 式に基づき, α をパラメータとして x を $N\tau$ に関してえがくと Fig. 5 の実線で示す結果となる. この図は槽内におけるスラグの平均滞留時間 V_s/F_s が一定の条件でメタル中の不純物濃度におよぼすスラグ/メタル槽内滞留量比と操作時間の影響を示している.

α が増加するとともに x は減少して, $\alpha = \infty$ の極限条件における (39) 式の極限値に近づく.

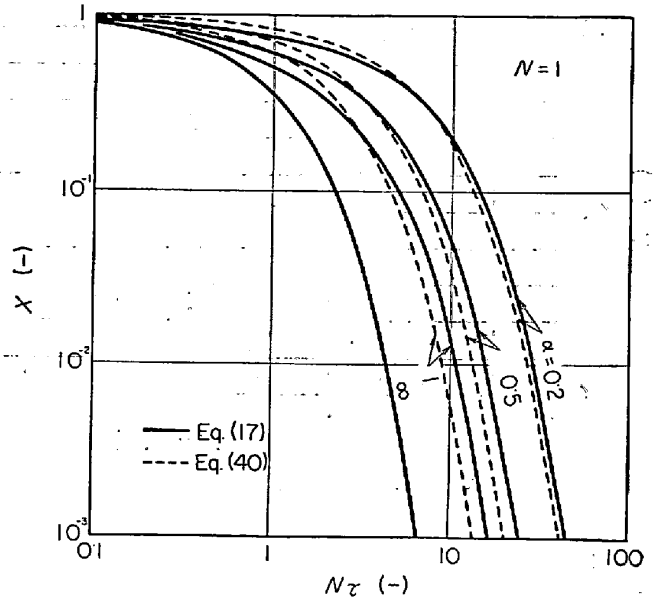


Fig. 5. $x-N\tau$ relations in operation (C).

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} x = \exp(-N\tau) \quad (39)$$

スラグ相における不純物濃度の蓄積を無視して導びかれた森³⁾の関係式は, (3) 式で $dC_s/d\theta = 0$ の条件のもとで求まる解, (40) 式に相当する.

$$x = \exp \{ - \alpha N \tau / (\alpha + N) \} \quad (40)$$

(40) 式に基づき x を $N\tau$ に関してえがくと, Fig. 5 の点線の結果となる. α が有限の場合には, 操作の比較的初期での x の値は, (40) 式によるほうが (17) 式に基づく値とくらべて大きい, 操作の進行に伴って, 両者の関係が逆転し, (40) 式による x が (17) 式に基づくそれより小さくなるようである.

4.2 半回分式メタル流通操作(d)における $\bar{x}$ と $N\tau$ の関係

(18) 式に基づき, α をパラメータとして流出メタル中の不純物の平均濃度 $\bar{x}$ を $N\tau$ に関してえがいたのが Fig. 6 の実線で示す結果である.

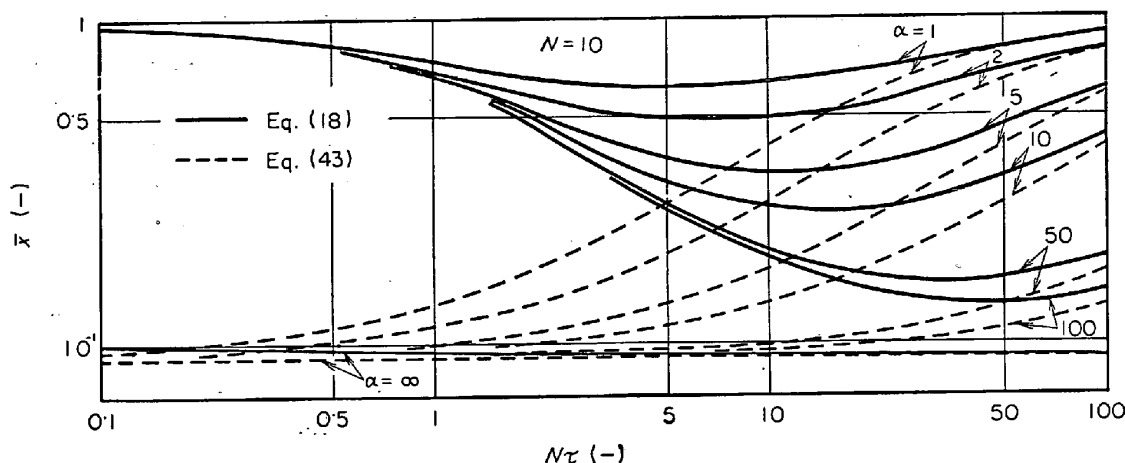
$V_m/F_m =$ 一定の条件では, α が増すと不純物の除去効果があるが, α が一定の場合は, 操作開始後 $\bar{x}$ は, いったん低下したのち再び上昇する. $N\tau = \infty$ の極限では $\bar{x} = 1$ となる. このような操作では, $\bar{x}$ が最小値に相当する τ の値で操作を打切るのが望ましい. (18) 式で $\partial \bar{x} / \partial \tau = 0$ の条件から, 操作を打切るべき時間に相当する τ が (41) 式で与えられる.

$$q_1 \{1 + (q_2 \tau - 1) \exp(q_2 \tau)\} = q_2 \{1 + (q_1 \tau - 1) \exp(q_1 \tau)\}$$

$\alpha = \infty$ の極限条件では, $\bar{x}$ の極限値は,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \bar{x} &= [1 + \{N/(1+N)\} \tau \\ & \quad \{1 - \exp[-(1+N)\tau]\}]/(1+N) \quad (42) \end{aligned}$$

で与えられる.

Fig. 6. $\bar{x}$ - $N\tau$ relations in operation (d).

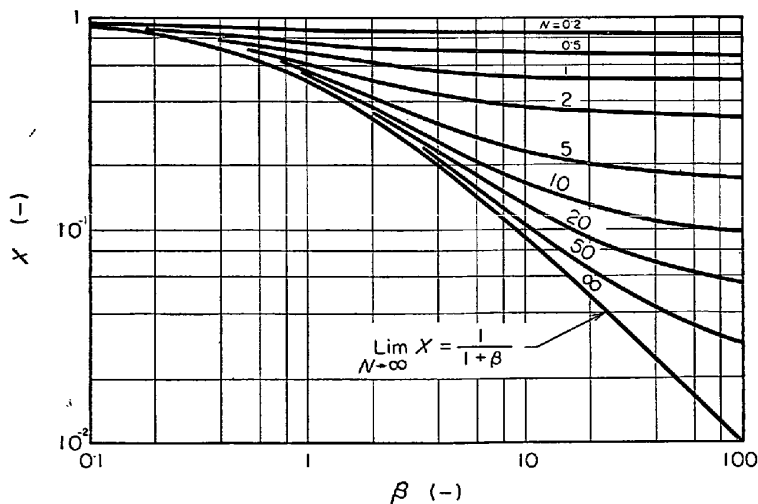
基礎式(4)で $dC_m/d\theta=0$ とおくと、メタル流中の不純物濃度に関する逐次定常の仮定に基づく(43)式が導かれる。

$$\bar{x} = 1 - (\alpha/\tau) [1 - \exp\{-N\tau/(1+N)\alpha\}] \dots (43)$$

(43)式は、さきに森³⁾によつて示された式に相当する。(43)式に基づく $\bar{x}$ と $N\tau$ の関係は Fig. 6 の点線で示されている。図から、 $N\tau$ が小さい値の範囲で(43)式による $\bar{x}$ の値が(18)に基づく $\bar{x}$ よりかなり小さい値を与えていることがわかる。両者の値は $N\tau > 50$ でいどでほぼ一致するようになる。操作(d)においては、操作開始直後ほどメタル中の不純物が移動しやすいため、それらの期間でメタル中の不純物濃度に定常を仮定するところから両者の値の相異が現われているものと考えられる。 $N\tau$ が十分大きい値の範囲ではこのような定常仮定が近似的に成立すると思われる。

5. 連続式操作(e)~(k)

5.1 連続式槽型接触操作(e)の x と β の関係

Fig. 7. x - β relations in operation (e).

(19)式に基づき、 N をパラメータとして、 x を β に関してえがくと、Fig. 7の結果となる。(19)式において、 N と β とは、たがいに同等であるから、Fig. 7で β と N とを交換することが許される。スラグのメタルにたいする流量比 β を大きくすれば、当然 x は減少する。 $\beta = \infty$ の極限で(19)式は(44)式となる。

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} x = 1/(1+N) \dots (44)$$

5.2 連続式多段スラグ直交流操作(f)のスラグ流量とメタル滞留量の最適配分

(20)式に基づき、 N および n をパラメータとして、 x_n を β に関して Fig. 8 に示した。(19)式の場合と同様で、(20)式でも N と β とは、たがいに等価である。 N または、 β が比較的大きい値の範囲では段数 n を増すと x_n はかなり低下する。 $n = \infty$ の極限では

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \exp\{-\beta N/(\beta + N)\} \dots (45)$$

となる。 $\beta = \infty$ では(20)'式と同形の N に関する式が得られる。

先出の(20)式は $F_{s,i} = F_s/n$ および $V_{m,i} = V_m/n$ ($i=1 \sim n$) の条件で(7)式に基づき導かれたが、一般に $F_{s,i}$ および $V_{m,i}$ が任意の場合は(7)式の解として(46)式が得られる。

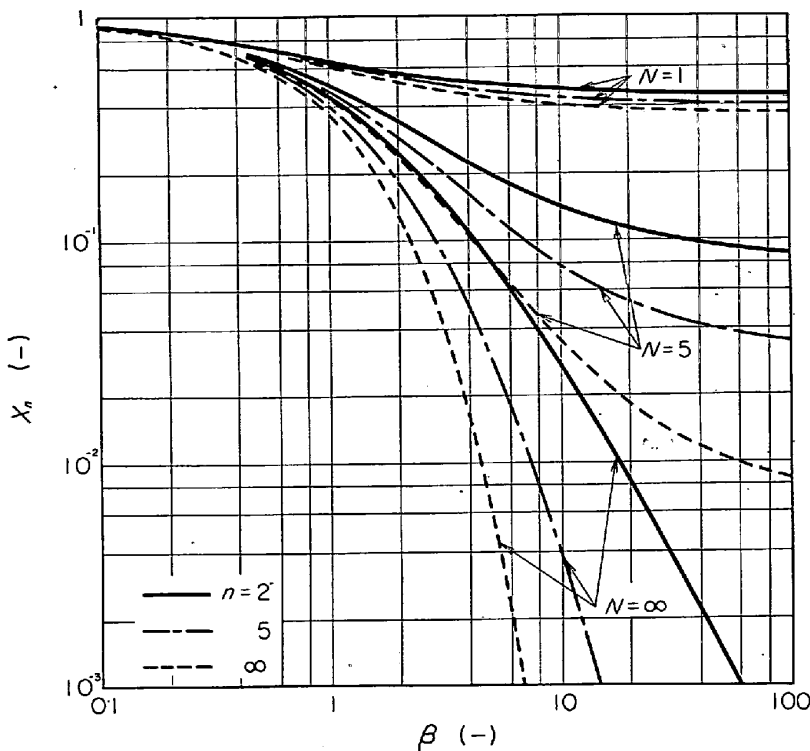
$$x_n = \prod_{h=1}^n [(N_h + \beta_h) / \{\beta_h + N_h(1 + \beta_h)\}] \dots (46)$$

ここで、 $N_h = k_m a_m (V_{m,h}/F_m)$ 、 $\beta_h = K F_{s,h}/F_m$ である。

いま、 $\sum_{h=1}^n F_{s,h} = F_s = \text{一定}$ および $\sum_{h=1}^n V_{m,h} = V_m = \text{一定}$ の条件、すなわち、

$$\sum_{h=1}^n \beta_h = \beta = \text{一定}, \quad \sum_{h=1}^n N_h = N = \text{一定} \dots (47)$$

の条件下で、 x_n の最小値を与える各段のスラ

Fig. 8. $\bar{x}_n - \beta$ relations in operation (f).

グ流量およびメタル滞留量を決定する。

目的関数は

$$P = x_n + \lambda_1 \left(\sum_{h=1}^n N_h - N \right) + \lambda_2 \left(\sum_{h=1}^n \beta_h - \beta \right) \quad \dots (48)$$

λ_1, λ_2 : ラグランジュの未定係数

となり, $\partial P / \partial N_i = 0$ および $\partial P / \partial \beta_i = 0$ ($i=1 \sim n$) の条件から (49) 式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \beta_i^2 / (N_i + \beta_i) \{ \beta_i + N_i (1 + \beta_i) \} \\ & = \lambda_1 \prod_{h=1}^n [\{ \beta_h + N_h (1 + \beta_h) \} / (N_h + \beta_h)] \equiv C_1 \quad \dots (49) \\ & N_i^2 / (N_i + \beta_i) \{ \beta_i + N_i (1 + \beta_i) \} \\ & = \lambda_2 \prod_{h=1}^n [\{ \beta_h + N_h (1 + \beta_h) \} / (N_h + \beta_h)] \equiv C_2 \end{aligned} \right\} \quad (i=1 \sim n)$$

ここで, C_1 および C_2 は定数である。(49) 式から, $\sqrt{C_1} N_i = \sqrt{C_2} \beta_i$ となるから, これを $i=1 \sim n$ まで加えあわせると,

$$N_i / \beta_i = N / \beta \quad (i=1 \sim n) \quad \dots (50)$$

(49) および (50) 式より

$$N_i = 1 / C_1 (1 + N / \beta) - N / \beta - 1 \quad \dots (51)$$

(51) 式を $i=1 \sim n$ まで加えあわせて,

$$N = \{ 1 / C_1 (1 + N / \beta) - N / \beta - 1 \} n \quad \dots (52)$$

(51) および (52) 式から

$$N_{i, opt} = N / n \quad \dots (53)$$

(50) および (53) 式から

$$\beta_{i, opt} = \beta / n \quad \dots (54)$$

となる。 n 段操作 (f) のスラグ最適配分量は F_s / n , ま

た, メタルの最適滞留量は V_m / n となる。

Fig. 9 に連続式 2 段スラグ直流操作につき $N=10$ および $\beta=5$ の場合の (46) 式に基づくメタル中の不純物濃度 x_2 を種々のスラグ流量配分比をパラメータとして, 種々のメタル滞留量配分比にたいして示した。

図からすべての操作条件中 $\beta_1 = \beta / 2$ および $N_1 = N / 2$ の条件下で最小の x_2 が得られることがわかる。

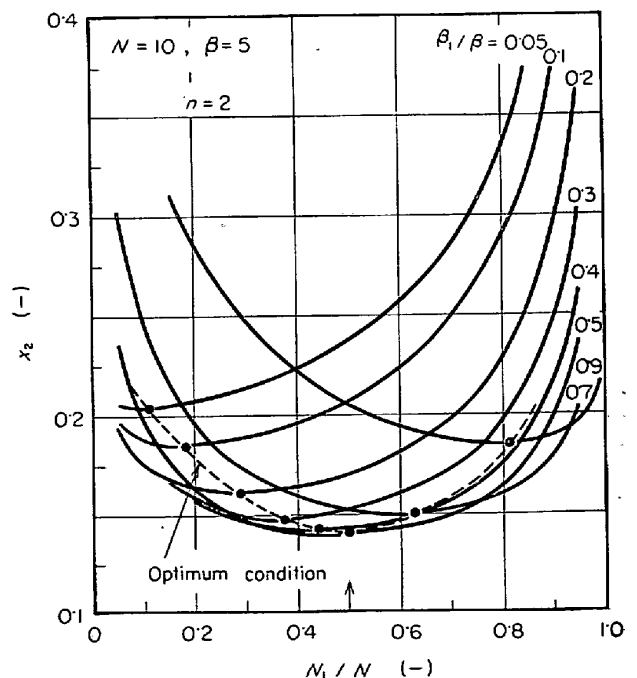
5.3 連続式多段メタル直流操作の最 (g) の適操作条件

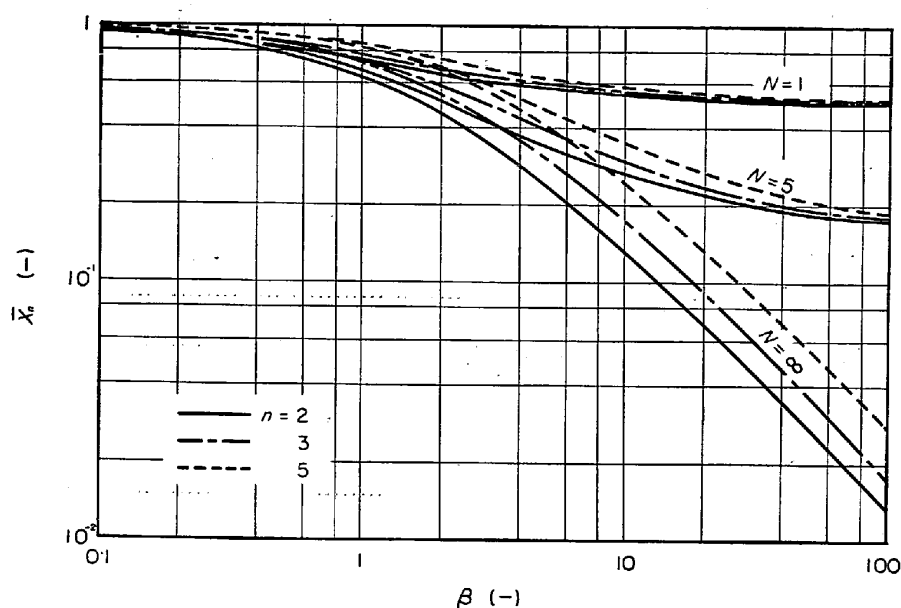
(21) 式に基づき, n および N をパラメータとして, 各段から流出するメタル中の不純物の平均濃度 $\bar{x}_n$ を β に関して Fig. 10 に示した。操作の形式から推察されるように, 操作 (g) では段数を増すとともに $\bar{x}_n$ は減少する。スラグ / メタルの相対流量に相当する β を大きくすると, $\bar{x}_n$ は減少するが, $\beta = \infty$ の極限では, 段数にかかわらず $\bar{x}_n$ の極限值は (55) 式で与えられる。

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \bar{x}_n = 1 / (1 + N) \quad \dots (55)$$

(55) 式は操作 (e) の (44) 式と一致する。

一般に, $F_{m,i}$ および $V_{m,i}$ が任意である場合の流出スラグ中の不純物濃度は (8) 式に基づき (56) 式で与えることができる。

Fig. 9. Optimum condition of operation (f) with $n=2$.

Fig. 10. $\bar{x}_n - \beta$ relations in operation (g).

$$y_n = N_n / \{\beta_n + N_n(1 + \beta_n)\} + \sum_{h=1}^n \left[\frac{N_h}{\beta_h + N_h(1 + \beta_h)} \right] \prod_{j=h+1}^n \left\{ \frac{\beta_j(1 + N_j)}{\beta_j + N_j(1 + \beta_j)} \right\} \quad (56)$$

$F_{m,i}$ と $V_{m,i}$ ($i=1 \sim n$) とに一定の制限がある場合に $\bar{x}_n$ を最小にするような最適操作条件は、おなじ制限条件下で (56) 式の y_n の最大値に相当する操作条件と同一である。

(56) 式に基づき、前節までに示したラグランジェの乗数法を適用して最適条件を探索することは困難である。

いま、操作 (g) に関する基礎式 (8) から (57) 式が導かれる。

$$y_i = \{\phi_i + (1 + \phi_i/\phi_i)y_{i-1}\} / \{1 + (1 + 1/\phi_i)\phi_i\} \equiv F_1 \quad (i=1 \sim n) \quad (57)$$

ここで、 $\phi_i = N_i/\beta_i$ および $\phi_i = 1/\beta_i$ である。

$$\text{また、} i=0 \text{ で } y_0 = 0 \quad (58)$$

この操作においては生産速度の観点からメタル流量 $F_{m,i}$ をできるだけ大きくし、かつ、固定費の観点からメタル滞留量 $V_{m,i}$ は小さいほうが望ましい。もちろん、操作の目的は不純物除去であり、 y_i は高いほうが望ましい。したがって、任意の第 i 段での利益関数 π_i を $\pi_i = y_i - y_{i-1} - \lambda_1 \phi_i - \lambda_2 \psi_i$, λ_1, λ_2 : 定数…… (59) で表わすことができる。全操作にわたつての目的関数は (60) 式で定義する関数の第 n 段での値 v_n となる。

$$v_i = v_{i-1} + y_i - y_{i-1} - \lambda_1 \phi_i - \lambda_2 \psi_i \equiv F_2 \quad (i=1 \sim n) \quad (60)$$

ここで、 $v_0 = 0$ である。

最大原理にしたがえば、随伴変数 Z_1 および Z_2 は (61)

および (62) 式で定義できる。

$$Z_{i-1} = Z_{1,i} \partial F_1 / \partial y_{i-1} + Z_{2,i} \partial F_2 / \partial y_{i-1} = \{(1 + \phi_i/\phi_i)Z_{1,i} - \phi_i Z_{2,i}\} / \{1 + (1 + 1/\phi_i)\phi_i\} \quad (61)$$

$$Z_{2,i-1} = Z_{1,i} \partial F_1 / \partial v_{i-1} + Z_{2,i} \partial F_2 / \partial v_{i-1} = Z_{2,i} \quad (62)$$

終端条件は、 $Z_{1,n} = 0$ および

$$Z_{2,n} = 1 \quad (63)$$

であり、(62), (63) 式から

$$Z_{2,i} = 1 = Z_{2,n} \quad (64)$$

となる。このとき、ハミルトニアンは

$$H_i = Z_{1,i} F_1 + Z_{2,i} F_2 = Z_{1,i} F_1 + (v_{i-1} + F_1 - y_{i-1} - \lambda_1 \phi_i - \lambda_2 \psi_i) \quad (i=1 \sim n) \quad (65)$$

となり、 v_n を最大にする最適操作条件は $\partial H_i / \partial \phi_i = 0$ および $\partial H_i / \partial \psi_i = 0$ の条件により、

$$\left. \begin{aligned} Z_{1,i+1} &= \lambda_1 \{1 + 1/\phi_i\} \phi_i^2 / (1 - y_{i-1}) \\ Z_{1,i+1} &= \lambda_2 \phi_i^2 \{1 + (1 + 1/\phi_i)\phi_i\}^2 / \phi_i^2 (1 - y_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

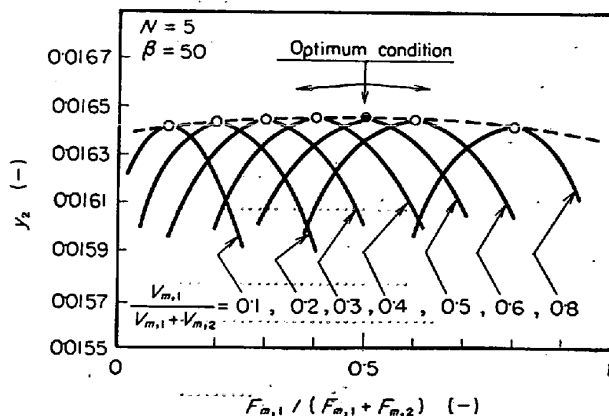
(64), (66) 式を (61) 式に代入して、 $Z_{1,i}$ を消去すれば

$$\left. \begin{aligned} Z_{1,i-1} + 1 &= \lambda_1 \{1 + (1 + 1/\phi_i)\phi_i\} / (1 + \phi_i/\phi_i) / (1 - y_{i-1}) \\ Z_{1,i-1} + 1 &= \lambda_2 \phi_i^2 \{1 + (1 + 1/\phi_i)\phi_i\} / (1 + \phi_i/\phi_i) / \phi_i^2 (1 - y_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

(67) 式において、 $i=i+1$ とすすめて、(66) 式と組み合わせ、 $Z_{1,i}$ を消去すれば、(68) 式の関係が得られる。

$$\phi_i/\phi_i = \phi_{i+1}/\phi_{i+1} \quad \therefore (V_{m,i}/F_{m,i})_{opt} = V_m/F_m \quad (68)$$

すなわち、(59) 式に関して述べた条件で、この操作の最適条件は、各段でのメタルの滞留時間をひとしくすることに相当する。

Fig. 11. Optimum conditions of operation (g) with $n=2$.

いま、連続式2段操作(g)について、種々の操作条件下でのスラグ中の不純物濃度 y_2 を(56)式から計算したのが Fig. 11 である。図の結果から第1および2段槽でのメタルの滞留時間がひとしい場合に y_2 の最大値が存在し、(68)式の結果と一致する。しかし、(57)~(68)式の解析により導びくことができない重要なもう一つの結果として、Fig. 11 では y_2 のすべての極大点のうち、 $V_{m,1}=V_{m,2}$ および $F_{m,1}=F_{m,2}$ の点の y_2 が、さらに、最大となつている。この事実は、おそらく、 $\sum_{h=1}^n F_{m,h}$ = 一定および $\sum_{h=1}^n V_{m,h} = V_m$ = 一定の制限のもとでの操作(g)の一般的な最適特性であろうと考えられる。

5.4 向流および並流接触操作(h)~(k)での不純物濃度と操作条件

(22)および(23)式に基づき、 n および N をパラメータとして、Fig. 12 および13に操作(h)と(i)との x_n を β に関して示した。これら両図の比較から、同一の操作条件下での不純物除去効果は、向流操作が並流操作よりすぐれていることがわかる。操作(h)および(i)では、 n 、 N および β が増すほど x_n は減少し、 $\beta = \infty$ の極限では、 x_n はいずれも(69)式で与えられる。

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} x_n = (1 + N/n)^{-n} \quad (69)$$

(22)および(23)式で $n = \infty$ の場合は、それぞれ操作(j)および(k)の(24)および(25)式となる。(24)式および(25)式に基づく x の値はFig. 12 および 13 での $n = \infty$ の場合で示されている。

この場合も向流操作の x が並流操作のそれと比較してより小さい。 $\beta = \infty$ の極限では両方の操作の x は(70)式で示す同一の極限值をもっている。

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} x = \exp(-N) \quad (70)$$

5.5 連続式多段向流操作(h)の最適操作条件

操作(h)に関する(9)式は(71)~(73)式のよう

$$x_i = (x_{i-1} + N_i y_{i-1}) / (1 + N_i) \equiv F_1 \quad (i = 1 \sim n) \quad (71)$$

$$y_i = (\beta + N_i) y_{i-1} / \beta - (N_i / \beta) x_i \equiv F_2 \quad (i = 1 \sim n) \quad (72)$$

$$x_0 = 1, y_n = 0 \quad (73)$$

一般に、この場合の任意の段での利益は

$$\pi_i = x_{i-1} - x_i - \lambda N_i \quad \lambda: \text{定数} \quad (74)$$

で表わせるので、目的関数を(75)式の定義に基づく第 n 段での v_n ととることができる。

$$v_i = v_{i-1} + x_{i-1} - x_i - \lambda N_i \equiv F_3, v_0 = 0, \lambda: \text{定数} \quad (75)$$

随伴変数は、

$$Z_{1,i-1} = \sum_{p=1}^3 Z_{p,i} (\partial F_p / \partial x_{i-1}) = \{Z_{1,i} - (N_i / \beta) Z_{2,i} + N_i Z_{3,i}\} / (1 + N_i) \quad (76)$$

$$Z_{2,i-1} = \sum_{p=1}^3 Z_{p,i} (\partial F_p / \partial y_{i-1}) = [N_i Z_{1,i} + \{\beta + N_i(1 + \beta)\} Z_{2,i} / \beta - N_i Z_{3,i}] / (1 + N_i) \quad (77)$$

$$Z_{3,i-1} = \sum_{p=1}^3 Z_{p,i} (\partial F_p / \partial v_{i-1}) = Z_{3,i} \quad (78)$$

で定義される。終端条件は、 $Z_{1,n} = Z_{2,n} = 0$ および $Z_{3,n} = -1$ であるから、(78)から

$$Z_{3,i} = -1 = Z_{3,n} \quad (79)$$

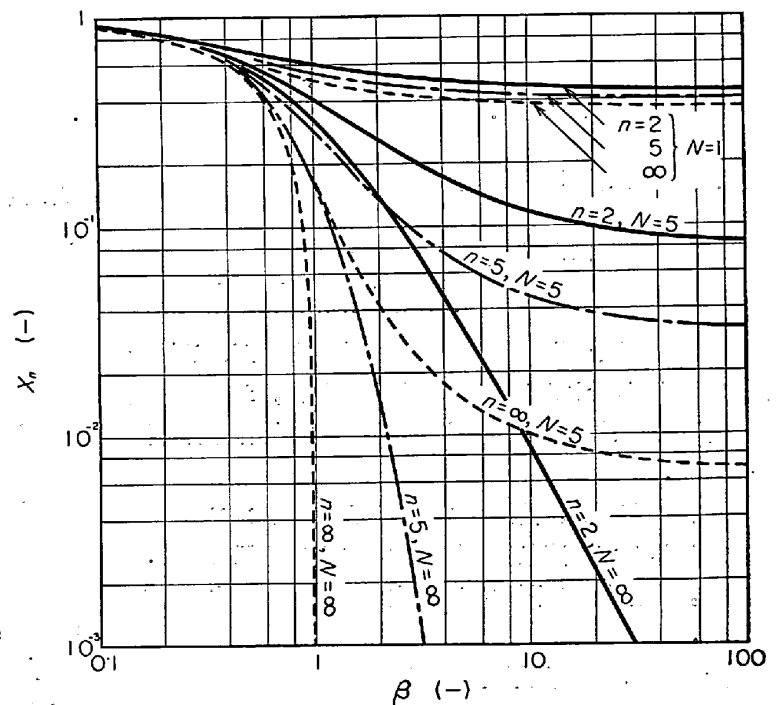


Fig. 12. $x_n - \beta$ relations in operations (h) and (j).

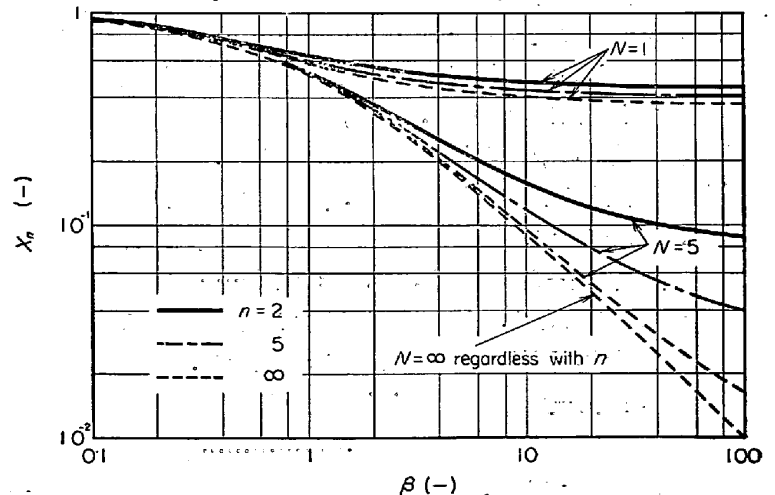


Fig. 13. $x_n - \beta$ relations in operations (i) and (k).

となる。ハミルトニアンは、

$$H_i = \sum_{p=1}^3 Z_p F_p = Z_{1,i} F_1 + Z_{2,i} \{ (1 + N_i/\beta) y_{i-1} - (N_i/\beta) F_1 \} - (v_{i-1} + x_{i-1} - F_1 - \lambda N_i) \dots (80)$$

となり、 $\partial H_i / \partial N_i = 0$ の条件から、

$$Z_{1,i} + Z_{2,i} / \beta + 1 = \lambda (1 + N_i)^2 / (x_{i-1} - y_{i-1}) \dots (81)$$

となる。

(76)～(79)および(81)式から、 $Z_{1,i}$ および $Z_{2,i}$ を消去して整理すると、

$$Z_{1,i-1} + Z_{2,i-1} / \beta + 1 = \lambda (1 + N_i) (1 + N_i / \beta) / (x_{i-1} - y_{i-1}) \dots (82)$$

(82)式で $i = i + 1$ とすすめて、(81)式と比較すれば

$$(x_{i-1} - y_{i-1}) / (x_i - y_i) = (1 + N_i)^2 / (1 + N_{i+1}) (1 + N_{i+1} / \beta) \dots (83)$$

となる。一方(71)および(72)式から、

$$(x_{i-1} - y_{i-1}) / (x_i - y_i) = \beta (1 + N_i) / (\beta + N_i) \dots (84)$$

が導びかれ、(83)および(84)式から

$$(1 + N_i) (\beta + N_i) = (1 + N_{i+1}) (\beta + N_{i+1}) = C, \\ C: \text{定数} \dots (85)$$

の関数が得られる。

(85)式をとけば、 $\sum_{h=1}^n N_h = N$ を考慮することにより、

$$N_{i,opt} \pm N/n \quad (i=1 \sim n) \dots (86)$$

が導びかれる。

この結論を実際計算により示すために、 $n=2$ について $V_{m,i}$ ($i=1 \sim n$) が任意である場合の基礎式(9)の解、(87)式

$$x_2 = (\beta + N_1) (\beta + N_2) / \{\beta + N_1 + \beta N_1\} \\ (\beta + N_2 + \beta N_2) - \beta N_1 N_2 \dots (87)$$

に基づき、種々の操作条件下で N_1/N に関して x_2 を求めたのが Fig. 14 の実線で示した結果である。これより、最適操作条件は $N_1 = N_2 = N/2$ に存在することが示され(86)式の結果と一致する。

5.6 連続式多段並流操作(i)の最適操作条件

$V_{m,i}$ が任意である場合には、基礎式(10)より(88)～(90)式が書ける。

$$x_i = \{ (\beta + N_i) x_{i-1} + \beta N_i y_{i-1} \} / \{ \beta + N_i (1 + \beta) \} \equiv F_1 \\ (i=1 \sim n) \dots (88)$$

$$y_i = \{ N_i x_{i-1} + \beta (1 + N_i) y_{i-1} \} / \{ \beta + N_i (1 + \beta) \} \equiv F_2 \\ (i=1 \sim n) \dots (89)$$

$$x_0 = 1, y_0 = 0 \dots (90)$$

目的関数 v_n は(91)式で定義される v_i の $i=n$ の値である。

$$v_i = v_{i-1} + x_{i-1} - x_i - \lambda N_i \equiv F_3, \\ v_0 = 0, \lambda: \text{定数} \dots (91)$$

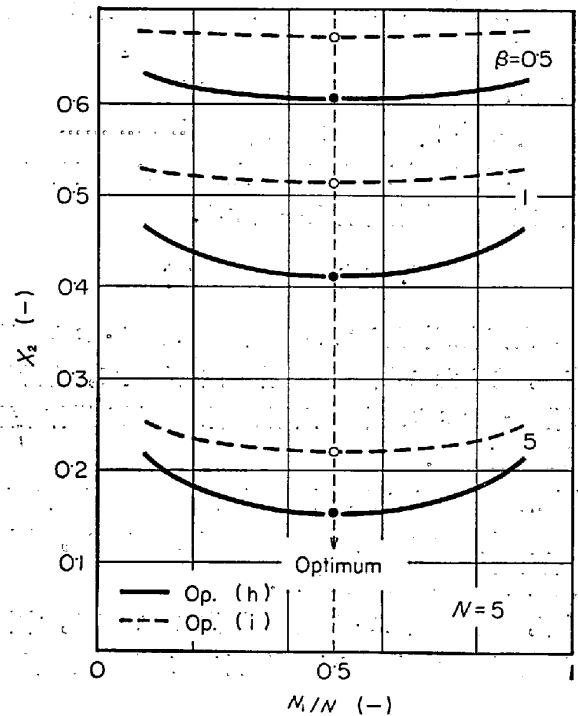


Fig. 14. Optimum conditions of operations (h) and (i), with $n=2$.

随伴変数を導入すれば、

$$Z_{1,i-1} = \{ (\beta + N_i) Z_{1,i} + N_i Z_{2,i} + \beta N_i Z_{3,i} \} / \{ \beta + N_i (1 + \beta) \} \dots (92)$$

$$Z_{2,i-1} = \beta \{ N_i Z_{1,i} + (1 + N_i) Z_{2,i} - N_i Z_{3,i} \} / \{ \beta + N_i (1 + \beta) \} \dots (93)$$

$$Z_{3,i-1} = Z_{3,i} \dots (94)$$

$$\text{終端条件は、} Z_{1,n} = Z_{2,n} = 0 \text{ および } Z_{3,n} = -1 \dots (95)$$

また、ハミルトニアンは、

$$H_i = Z_{1,i} F_1 + Z_{2,i} (y_{i-1} + x_{i-1} / \beta - F_1 / \beta) - (v_{i-1} + x_{i-1} - F_1 - \lambda N_i) \dots (96)$$

v_n 最大の条件は、 $\partial H_i / \partial N_i = 0$ から、

$$Z_{1,i} - Z_{2,i} / \beta + 1 = \lambda \{ \beta + N_i (1 + \beta) \}^2 / \beta^2 (x_{i-1} - x_{i-1}) \dots (97)$$

となる。

(92)～(94)および(97)式より $Z_{1,i}$ および $Z_{2,i}$ を消去すれば、

$$Z_{1,i-1} - Z_{2,i-1} / \beta + 1 = \lambda \{ \beta + N_i (1 + \beta) \}^2 / \beta^2 (x_{i-1} - y_{i-1}) \dots (98)$$

(98)式で $i=i+1$ とすすめて、(97)式と組合わせて、さらに、(88)および(89)式から得られる(99)式

$$(x_{i-1} - y_{i-1}) / (x_i - y_i) = 1 + N_i + N_i / \beta \dots (99)$$

の関係をもちいることにより、(100)式が導びかれる。

$$N_i = N_{i+1} \text{ すなわち、} N_{i,opt} = N/n \dots (100)$$

となる。

2 段操作 (i) における基礎式 (10) の一般解は (101) 式となるが,

$$x_2 = \{(\beta + N_1)(\beta + N_2) + \beta N_1 N_2\} / (\beta + N_1 + \beta N_1)(\beta + N_2 + \beta N_2) \dots\dots\dots (101)$$

(101) 式に基づく Fig. 14 の点線で示した計算結果は (100) 式の最適操作条件と一致する.

6. 結 言

他の研究者が検討している 6 種のスラグ・メタル接触操作に, あらたに 5 種類の操作形式を加えて, 合計 11 種の操作につきメタル中の不純物の除去効果と操作条件の関係を検討した.

各操作におけるメタル中の不純物濃度の理論解に基づき, 平衡論的および速度論的な考察をおこない, 各操作の不純物除去効果を比較した.

従来, 解析されている数種の操作については, 本報の解析の手法および結果と比較対照して問題を明確にした.

多重および多段操作における操作時間配分; スラグとメタルの流量配分あるいは滞留量配分の最適条件につき検討した. その結果, 最適操作条件として, 操作 (b),

(f), (g), (h) および (i) のそれぞれにつき, (36), (38) 式, (53), (54) 式, (68) 式, (86) 式および (100) 式が成立することが明らかとなった.

記 号

a_m : スラグ/メタル接触界面積 ($\text{cm}^2/\text{cm}^3(\text{metal})$)

C_m, C_{m0} : メタル中の不純物濃度および初濃度 (mol/cm^3)

C_s : スラグ中の不純物濃度 (mol/cm^3)

F_m, F_s : メタルおよびスラグ流量 (cm^3/sec)

K : 平衡定数 (—)

k_m : 物質移動係数 (cm/sec)

L : 管長 (cm)

R : 物質移動速度 ($\text{mol}/\text{cm}^3(\text{metal}) \cdot \text{sec}$)

V_m, V_s : メタルおよびスラグの槽内滞留量 (cm^3)

Z : 長さ (cm)

θ, θ_0 : 時間および基準時間 (sec)

文 献

- 1) H. SCHENCK, E. STEINMETZ and M. G. FROHBERG: Arch. Eisenhüttenw., 34 (1963), p. 659
- 2) H. SCHENCK: Stahl u. Eisen, 84 (1964), p. 311
- 3) 森: 鉄と鋼, 50 (1964), p. 1826