(38) 物性値が温度に依存する熱伝導問題の研究

東京大学 工学部　工博 河原田 秀夫
川崎製鐵 千葉製鐵所　○田宮 稔士

1. 緒 言： 物性値が温度に依存する熱伝導問題は鉄鋼プロセスにおいて数多く見受けられる。この問題は非線形偏微分方程式になり，解析的取扱いは困難視されている。本報文では，熱伝導率および熱容量がそれぞれ温度に依存する非線形初期値境界値問題の逐次近似解の構成について述べる。

2. 熱伝導率が温度に依存する熱伝導問題の逐次近似解の構成

問題は以下のように記述されているとする。

$u_t = \mathrm{div}(a(u)\,\mathrm{grad}\,u)$, on $\Omega \subset R^n$, $t \geq 0$ …(1a), $u(0) = b(x)$, $x \in \Omega$ …(1b), $u|_{\partial\Omega} = 0$, $t \geq 0$ …(1c). すなわち境界域では0，初期値は変域xの関数である。ここで温度拡散係数は温度の1次関数で示されるとする。$a(u) = 1 + \alpha u$, $\alpha \ll 1$ …(2). (2)式を(1a)式に代入して整理すると次式のようになる。$u_t = \Delta u + \alpha(u\Delta u + \mathrm{div}\,u\,\mathrm{grad}\,u)$, on $\Omega \subset R^n$, $t \geq 0$ …(1a'). (1a')式右辺第2項は仮定により$\alpha \ll 1$であるから，uの第0近似値を$u^{(0)}$とおくと，$u^{(0)}$は以下の線形初期値境界値問題の解となる。$u_t^{(0)} = \Delta u^{(0)}$, on $\Omega \subset R^n$, $t \geq 0$ …(3a), $u^{(0)}(0) = b(x)$, $x \in \Omega$ …(3b), $u^{(0)}|_{\partial\Omega} = 0$, $t \geq 0$ …(3c).

この解は $u^{(0)} = e^{t\Delta} b$ …(4) となる。ただし，Δを生成作用素とする半群である。[1)]

uの第k近似値$u^{(k)}$, $k = 1, 2, \cdots n$, は次式群を満たす。

$$u_t^{(k)} = \Delta u^{(k)} + \alpha\left(u^{(k-1)}\Delta u^{(k-1)} + \mathrm{div}\,u^{(k-1)}\mathrm{grad}\,u^{(k-1)}\right), \quad \text{on } \Omega \subset R^n, \quad t \geq 0 \cdots (5a),$$

$$u^{(k)}(0) = b(x), \quad x \in \Omega \cdots (5b), \qquad u^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0 \cdots (5c).$$

半群の理論を用いると線形初期値境界値問題(5)式の解は

$$u^{(k)} = e^{t\Delta} b + \alpha\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\{u^{(k-1)}\Delta u^{(k-1)} + \mathrm{div}\,u^{(k-1)}\mathrm{grad}\,u^{(k-1)}\}ds \cdots (6).$$

となる。(6)式右辺第2項は非線形部分の抽出項であり，$u^{(k)}$に関する摂動的逐次近似解である。

3. 熱容量が温度に依存する熱伝導問題の逐次近似解の構成

問題は以下のように記述されているとする。

$u_t = \sigma(u)\Delta u$, on $\Omega \subset R^n$, $t \geq 0$ …(7a), $u(0) = b(x)$, $x \in \Omega$ …(7b), $u|_{\partial\Omega} = 0$, $t \geq 0$ …(7c). ここで，$\sigma(u)$は単調減少関数で常に正であり，$b(x)$は凹関数($\Delta b \leq 0$)であるとする。逐次近似列$\{u^{(k)}\}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$, で解の具体的構成を行う。ただし，$u^{(0)} = b(x)$, $x \in \Omega$ …(8) であり $u^{(k)}$ ($k = 1, 2, \cdots$)は以下の線形初期値境界値問題の解である。$u_t^{(k)} = \sigma(u^{(k-1)})\Delta u^{(k)}$, on $\Omega \subset R^n$, $t \geq 0$ …(9a), $u^{(k)}(0) = b(x)$, $x \in \Omega$ …(9b), $u^{(k)}|_{\partial\Omega} = 0$, $t \geq 0$ …(9c). このとき逐次近似列$\{u^{(k)}\}$に関して

$$u^{(0)} \equiv b(x) \geq u^{(1)} \geq u^{(2)} \geq \cdots \geq u^{(n)} \geq \cdots \geq 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \cdots (10).$$

が成立する。[2)] (10)式から解の大域的存在が証明された。他方，一意性については$\sigma(u)$にリプシッツ条件を課すことによって証明される。線形初期値境界値問題(9)式の数値解法をn回繰り返すことによって非線形初期値境界値問題(7)式の収束解が得られることが証明された。

4. 記 号： u—温度，x—変域，t—時間，a—温度拡散係数，σ—温度拡散係数，$u_t \equiv \partial u/\partial t$，$R^n$—$n$次元ユークリッド空間，$\Omega$—$R^n$の有界領域，$\partial\Omega$—$\Omega$の境界，$\Delta$—ラプラシアン，$b$—初期値。

5. 文 献：
1) 溝畑，偏微分方程式論，岩波． 2) H. KAWARADA, On the Uniqueness and the Existence of Solution of the Cauchy Problem for $u_t = \sigma(u)\Delta u$, to be published in CPAM (Communication of Pure and Applied Mathematics).